

УДК 004:519.2

Л.О. Кириченко, О.А. Кузьмина, С.Г. Удовенко

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

## МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАБИЛЬНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЯДОВ

*В работе проведено исследование мультифрактальных характеристик нестабильных финансовых временных рядов с помощью методов мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа. Оценивание обобщенного показателя Хёрста финансовых временных рядов до и после начала кризиса позволяет утверждать, что предкризисный период функционирования финансового рынка характеризуется узким диапазоном колебаний этого показателя, который существенно увеличивается после начала кризиса.*

**Ключевые слова:** мультифрактальный анализ, обобщенный показатель Хёрста, флуктуационный анализ, финансовый временной ряд, фрактальная структура рынка, кризис.

### Введение

Одним из примеров фрактальных стохастических структур являются современные финансовые рынки, для которых характерен эффект памяти, когда изменение цены зависит от величины предыдущего изменения. Гипотеза фрактальности финансовых временных рядов предполагает, что рынок представляет собой саморегулируемую макроэкономическую систему с обратной связью, использующую информацию о прошлых событиях, влияющих на решения в настоящем, и содержащую долговременные корреляции и тренды [1 – 5].

В качестве меры фрактальности и показателя сложности динамики временного финансового ряда может служить параметр Хёрста  $H$ , ( $0 < H < 1$ ), связанный с фрактальной размерностью  $D$  соотношением  $D = 2 - H$ .

При значениях  $0.5 < H < 1$  ряд демонстрирует персистентное (трендоустойчивое) поведение. Если персистентный ряд возрастал (убывал) в предыдущий период, то чем ближе показатель Хёрста к 1, тем с большей вероятностью будет сохраняться тенденция поведения этого ряда в течение такого же периода в будущем. Значение  $H = 0.5$  указывает на независимость (отсутствие какой-либо памяти о прошлом) значений временного ряда. Диапазон  $0 < H < 0.5$  соответствует антиперсистентным рядам: если антиперсистентный ряд характеризовался ростом в предыдущем периоде, то чем ближе показатель Хёрста к 0, тем с большей вероятностью в следующем периоде начнется спад.

Под стабильным понимается рынок, на котором все его участники могут осуществлять операции друг с другом, подвергаясь одинаковым рискам, в зависимости от шкалы времени и инвестиционного горизонта, присущих каждому участнику. Рынок остается стабильным, пока он не привязан к фиксированному масштабу времени. Когда весь инвестиционный горизонт рынка сокращается (инвесторы

теряют доверие к долгосрочной информации), рынок становится беспорядочным и нестабильным. Следовательно, можно утверждать, что рынок остается стабильным, пока он сохраняет свою фрактальную структуру. Анализируя динамику возникновения участков с различной фрактальной структурой, определяемой показателем Хёрста, можно диагностировать и прогнозировать нестабильные состояния (кризисы) рынка [3, 6 – 8].

Исследование монофрактальной модели финансовых рынков показывает, что значение параметра Хёрста на разных временных шкалах может отличаться, то есть в диапазоне минут временной ряд может быть антиперсистентным, а в диапазоне месяцев – персистентным. Более эффективным и универсальным инструментом анализа нестабильных финансовых систем следует считать мультифрактальную модель, в соответствии с которой финансовые временные ряды представляются объединением множества монофракталов [9 – 11].

**Целью настоящей работы** является проведение сравнительного анализа мультифрактальной структуры финансовых временных рядов до и после начала финансового кризиса 2008 года и выявление целесообразности использования такого анализа для текущей диагностики стабильности экономических систем.

### Основные характеристики мультифрактальных объектов

Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными на любом диапазоне масштабов. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами.

Рассмотрим основные характеристики мультифрактального множества [12, 13]. Пусть мультифрактальный объект занимает некоторую ограниченную область в  $d$ -мерном Евклидовом пространстве

и определяет собой множество из  $N \rightarrow \infty$  точек. Разобьем всю область на кубические ячейки с ребром  $\varepsilon$  и объемом  $\varepsilon^d$ . Рассмотрим обобщенную статистическую сумму  $Z(q, \varepsilon)$ , характеризуемую показателем степени  $q$ , который может принимать любые значения в интервале  $-\infty < q < +\infty$ :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (1)$$

где  $p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$ ;  $n_i(\varepsilon)$  – количество точек, попавшее в ячейку с номером  $i$ ;  $N(\varepsilon)$  – суммарное количество занятых ячеек, которое зависит от размера ячейки  $\varepsilon$ . Вероятности  $p_i$  характеризуют относительную заселенность ячеек.

В общем случае мультифрактал характеризуется некоторой нелинейной функцией  $\tau(q)$ , определяющей поведение статистической суммы  $Z(q, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}.$$

Функция  $\tau(q)$  определяется как

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

В случае обычного однородного фрактала с фрактальной размерностью  $D$  во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек, т.е.  $p_i(\varepsilon) = p(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$ , и обобщенная статистическая сумма принимает вид:

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon) = \varepsilon^{-D(1-q)},$$

а функция  $\tau(q) = (q-1)D$  является линейной. Если распределение точек по ячейкам не одинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. мультифрактальным, и  $\tau(q)$  является нелинейной функцией. При  $q \rightarrow +\infty$  основной вклад в обобщенную статистическую сумму вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц  $n_i$  и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью заполнения  $p_i$ . Наоборот, при  $q \rightarrow -\infty$  основной вклад в сумму дают самые разреженные ячейки с малыми значениями  $p_i$ . Таким образом, функция  $\tau(q)$  показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек.

Мультифрактальные стохастические процессы характеризуются обобщенным показателем Хёрста  $h(q)$ , величина которого определяется параметром  $q$ . Обобщенный показатель Хёрста связан с функцией  $\tau(q)$  соотношением [14]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1.$$

Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, обобщенный показатель Хёрста  $h(q) = H$  и не зависит от параметра  $q$ .

## Методы исследования

Существует множество методов оценки параметра Хёрста [15]. В частности, для исследования фрактальных нестационарных процессов широко применяется метод детрендрованного флуктуационного анализа (ДФА). ДФА базируется на теории одномерных случайных блужданий и позволяет выявлять эффекты долгосрочных корреляций в исследуемом процессе [16].

В методе ДФА для исходного временного ряда  $x(t)$  строится кумулятивный ряд  $y(t) = \sum_{i=1}^t x(t)$ , который разбивается на  $N$  сегментов длиной  $\tau$ . Для каждого сегмента  $y(t)$  вычисляется флуктуационная функция

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (y(t) - Y_m(t))^2, \quad (2)$$

где  $Y_m(t)$  – локальный  $m$ -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента.

Функция  $F(\tau)$  усредняется по всему ряду  $y(t)$ . Такие вычисления повторяются для различных размеров сегментов, чтобы получить зависимость  $F(\tau)$  в широком диапазоне значений параметра  $\tau$ . Для процессов с фрактальными свойствами с ростом  $\tau$  функция  $F(\tau)$  также возрастает, и линейная зависимость  $\log F(\tau)$  от  $\log \tau$  свидетельствует о наличии свойства масштабной инвариантности:

$$F(\tau) \propto \tau^H. \quad (3)$$

При исследовании свойств мультифрактальных процессов применяется мультифрактальный флуктуационный анализ (МФ-ДФА) [14, 17, 18]. При проведении МФ-ДФА исследуется зависимость флуктуационной функции  $F_q(\tau)$  от параметра  $q$ :

$$F_q(\tau) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(\tau)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4)$$

полученной возведением выражения (2) в степень  $q$  и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при  $q=0$  равенство (4) содержит неопределенность, то вместо него используют следующее предельное выражение:

$$F_q(\tau) = \text{Exp} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln [F^2(\tau)] \right\}.$$

Изменяя временную шкалу  $\tau$  при фиксированном показателе  $q$ , находим зависимость  $F_q(\tau)$ ,

представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к мультифрактальному множеству, проявляющему долгосрочные зависимости, то флуктуационная функция  $F_q(\tau)$  представляется степенной зависимостью

$$F_q(\tau) \propto \tau^{h(q)} \quad (5)$$

с обобщенным показателем Хёрста  $h(q)$ .

Из определений (2) и (4) следует, что при  $q=2$  этот показатель сводится к обычному значению  $H$ . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция  $F_q(\tau)$  одинакова для всех сегментов, и обобщенный показатель Хёрста  $h(q) = H$  не зависит от параметра  $q$ . Для мультифрактальных рядов  $h(q)$  является нелинейной функцией: при положительных  $q$  основной вклад в функцию  $F_q(\tau)$  дают сегменты, проявляющие большие отклонения  $F^2(\tau)$ , а при отрицательных  $q$  доминируют сегменты с малыми дисперсиями  $F^2(\tau)$ .

Таким образом, при отрицательных значениях  $q$  обобщенный показатель Хёрста  $h(q)$  описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие.

### Результаты исследования

Проведем сравнительный мультифрактальный анализ МФ-ДФА временных рядов обменных курсов валют до и после начала финансового кризиса 2008 года, представленных на сайте <http://bankir.ru/kurs/abs/840>.

В качестве примеров рассмотрим динамику изменения курса доллара США к российскому рублю, евро к рублю и котировок украинской гривны к российскому рублю в период с 01.01.2004 по 01.06.2010, представленную на рис. 1, а, б, в.

Характерная особенность всех приведенных графиков состоит в наличии участка, обнаруживающего большие изменения разности курса.

Эти изменения отражают финансовый кризис, разразившийся в 2008 году, когда стоимость доллара и евро по отношению к рублю и гривне резко возросла.

Следуя методу МФ-ДФА, рассмотрим влияние этого кризиса на мультифрактальные свойства исследуемых временных рядов. С этой целью для каждого ряда проведем отдельный анализ двух участков, один из которых предшествует кризису (период с 01.01.2004 по 30.12.2007), а другой следует после пиковой фазы (период с 21.05.09 по 01.06.10). Период наиболее острой фазы кризиса исключен нами из рассмотрения как непредсказуемый.

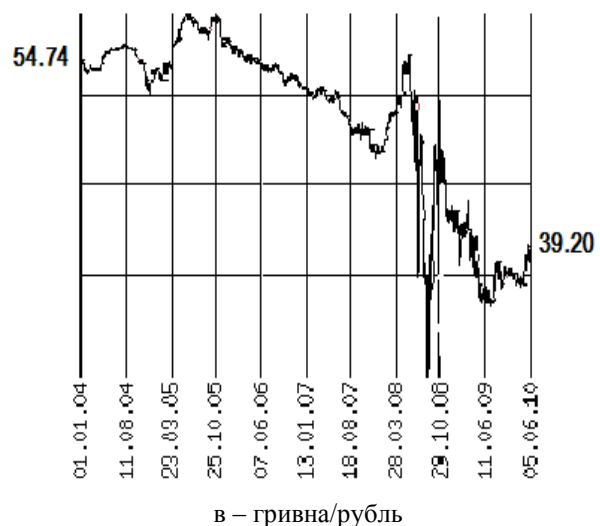
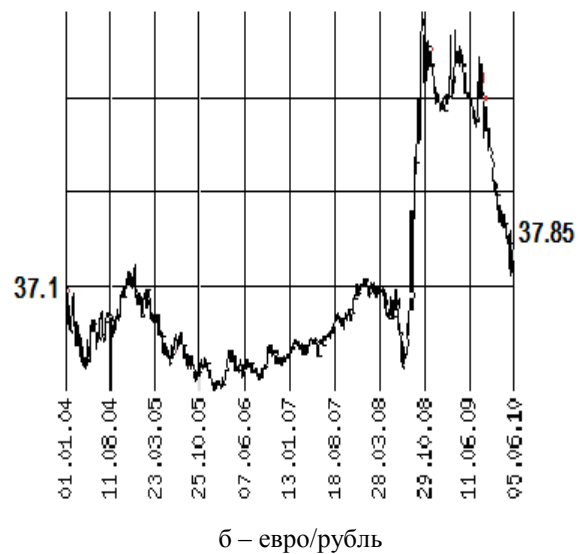
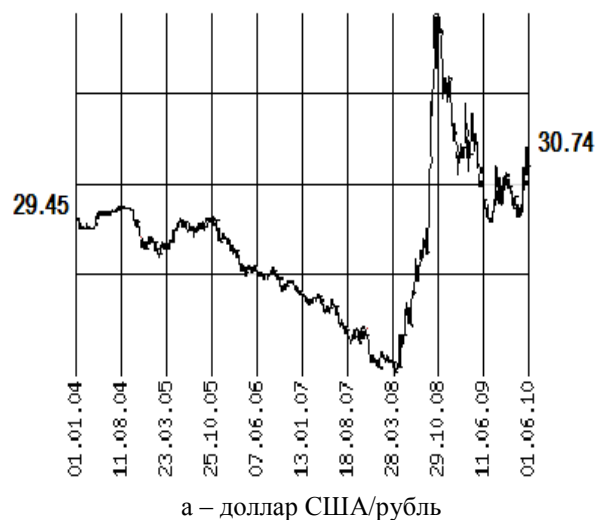


Рис. 1. Динамика котировок доллара США к российскому рублю (а), евро к рублю (б), 10 украинских гривен к российскому рублю (в) в период с 01.01.2004 по 01.06.2010

Рассчитаем обобщенный показатель Хёрста. Для этого для каждого временного ряда согласно

формуле (4) вычислим флуктуационные функции  $F_q(\tau)$ , изменяя параметр  $q$ .

Обобщенный показатель Хёрста определяется в соответствии с (5): зависимость  $\log F_q(\tau)$  от  $\log \tau$  в определенном диапазоне значений будет представлять собой прямую линию, аппроксимированную методом наименьших квадратов. Оценка показателя  $H$  вычисляется как тангенс угла наклона аппроксимированной прямой.

Графики функций  $h(q)$  представлены на рис. 2. Наличие нелинейной зависимости у всех функций говорит о том, что показатель Хёрста изменяется при изменении параметра  $q$ , и является подтверждением тому, что временной ряд колебания курса валют является мультифрактальным.

В предкризисный период все временные ряды демонстрируют только слабые временные корреляции. Обобщенный показатель Хёрста лежит в диапазоне  $0.4 < h(q) < 1.6$ .

Обычный показатель Хёрста  $H = h(2)$  в этот период близок к 0.5. С экономической точки зрения это означает сокращение инвестиционного горизонта рынка, который становится беспорядочным и нестабильным.

Из зависимостей, приведенных на рис. 2, видно, что после пика кризиса обобщенный показатель Хёрста  $h(q)$  для всех финансовых рядов приобретает более широкий интервал изменения  $0.2 < h(q) < 2.8$ .

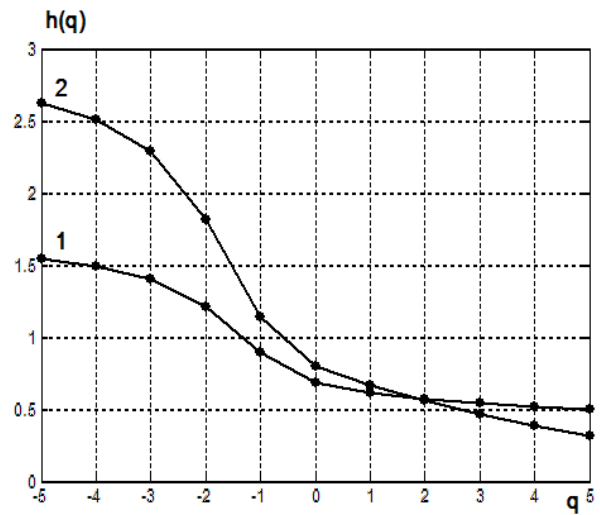
Это свидетельствует об усилении мультифрактальных свойств и появлении более сильных корреляций.

Экономически это выражается в том, что стоимость валюты приобретает сильную чувствительность к изменению экономических, социальных, политических и прочих факторов. Обычный показатель Хёрста  $H = h(2)$  в этот период больше 0.5. Пройдя пик финансового кризиса, временной ряд обменного курса становится персистентным, что характерно для финансовых временных рядов при стабильном рынке.

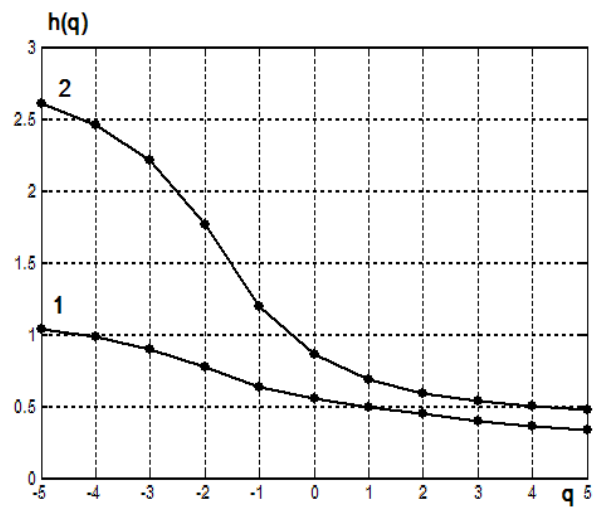
### Выводы

Результаты проведенных исследований подтверждают возможность использования фрактального анализа для выявления скрытых нарушений функционирования финансовых рынков.

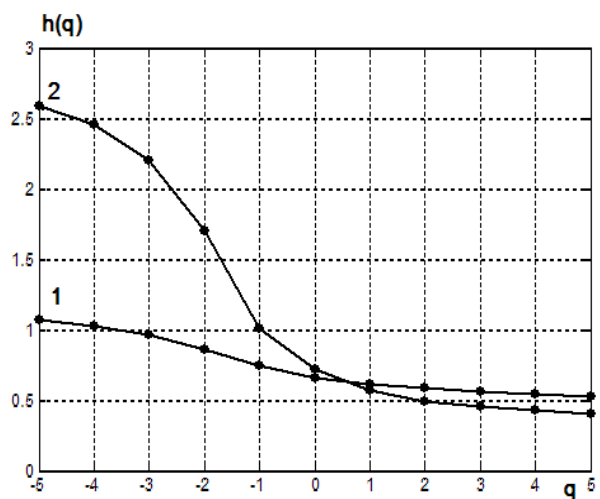
Обычный показатель Хёрста позволяет определить глобальные свойства временного ряда, а именно персистентность его поведения. Однако при этом выпадают из рассмотрения локальные свойства, представления которых достигается в рамках метода мультифрактального анализа.



а – доллар США/рубль



б – евро/рубль



в – гривна/рубль

Рис. 2. Обобщенный показатель Хёрста для рядов котировок до (линия 1) и после (линия 2) начала кризиса

Проведенный мультифрактальный анализ МФ-ДФА позволяет утверждать, что предкризисный

период и период спада кризиса, наступающий после пикового состояния, достаточно сильно отличаются по мультифрактальным свойствам валютных временных рядов, в частности, по диапазону изменения обобщенного показателя Хёрста.

Результаты, полученные в работе, позволяют сделать вывод о целесообразности применения текущих оценок обобщенного показателя Хёрста для разработки дополнительных инструментов диагностики и прогнозирования критических явлений для фрактальных временных рядов различной природы (геофизических, экономических, медицинских).

### Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала / Э. Петерс. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
3. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков / Э. Петерс. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 333 с.
4. Calvet L. Large deviation and the distribution of price changes / L. Calvet, A. Fisher, B. Mandelbrot // *Cowles Foundation Discussion Paper*. – Yale University. – 1997. – №1165. – P. 1-28.
5. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
6. Johansen A. Large Stock Market Price Drawdowns are Outliers / A. Johansen, D. Sornette // *Journal of Risk*. – 2001. – V. 4, №2. – P. 69-110.
7. Johansen A. Crashes as Critical Points / A. Johansen, D. Sornette, O. Ledoit // *International Journal of Theoretical & Applied Finance*. – 2000. – V. 3, № 2. – P. 219-255.
8. Мансуров А.К. Прогнозирование валютных кризисов с помощью методов фрактального анализа / А.К. Мансуров // *Проблемы прогнозирования*. – 2008. – № 1. – С. 145-158.
9. Calvet L. Multifractality of Deutschemark / US Dollar Exchange Rates / L. Calvet, A. Fisher, B. Mandelbrot // *Cowles Foundation Discussion Paper*. – Yale University. – 1997. – № 1166. – P. 1-23.
10. Arneodo A. Wavelet based multifractal formalism: applications to DNA sequences, satellite images of the cloud structure, and stock market data / A. Arneodo, B. Audit, N. Decoster, J.F. Muzy, C. Vaillant. in: *The science of disaster: climate disruptions, market crashes, and heart attacks*, edited by A. Bunde, J. Kropp, H.-J. Schellnhuber. – Berlin: Springer, 2002. – 322 p.
11. Matia K. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities / K. Matia, Y. Ashkenazy, H.E. Stanley // *Europhysics Letters*. – 2003. – № 61 (3). – P. 422-428.
12. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
13. Божокин С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. – 128 с.
14. Kantelhardt J.W. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series / J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, A. Bunde, S. Havlin, E. Koscielny-Bunde, H.E. Stanley // *Physica A*. – 2002. – № 316. – P. 87-114.
15. Clegg R.G. A practical guide to measuring the hurst parameter / R.G. Clegg // *Computing science technical report*. – 2005. – № CS-TR-916. – P. 125-138.
16. Kantelhardt J.W. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis / J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Havlin, A. Bunde // *Physica A*. – 2001. – № 295. – P. 441-454.
17. Олемской А.И. Мультифрактальный анализ временных рядов / А.И. Олемской, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда // *Вісник СумДУ Серія «Фізика, математика, механіка»*. – 2008. – №2. – С. 70-81.
18. Kantelhardt J.W. Fractal and Multifractal Time Series. – 2008. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.

Поступила в редколлегию 2.09.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.Г. Руденко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НЕСТАБІЛЬНИХ ФІНАНСОВИХ РЯДІВ

Л.О. Кіріченко, О.О. Кузьміна, С.Г. Удовенко

У роботі проведено дослідження мультифрактальних характеристик нестабільних фінансових тимчасових рядів за допомогою методів мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу. Оцінювання узагальненого показника Херста фінансових тимчасових рядів до і після початку кризи дозволяє стверджувати, що передкризовий період функціонування фінансового ринку характеризується вузьким діапазоном коливань цього показника, який істотно збільшується після початку кризи.

**Ключові слова:** мультифрактальний аналіз, узагальнений показник Херста, флуктуаційний аналіз, фінансовий часовий ряд, фрактальна структура ринку, криза.

### MULTIFRACTAL ANALYSIS OF UNSTABLE FINANCIAL TIME SERIES

L.O. Kirichenko, O.A. Kuzmina, S.G. Udovenko

Research of multifractal descriptions of unstable financial temporal rows is in-process conducted by the methods of multifractal detrended fluctuation analysis. The evaluation of the generalized Kherstindex of financial temporal rows before and after beginning of crisis allows to assert that the before crisis period of functioning of financial market is characterized the narrow range of vibrations of this index which is substantially increased after the beginning of crisis.

**Keywords:** multifractal analysis, generalized Kherst index, fluctuation analysis, financial temporal row, fractal structure of market, crisis.