УДК 681.5

О.Г. Оксіюк

Європейський університет, Київ

СТАТИЧНА ОЦІНКА СКЛАДНОСТІ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНОГО БІНАРНОГО ГРАФУ

Запропоновані алгоритми визначення значення показників критеріїв статичної складності булевих функцій.

Ключові слова: *булева функція, лінійний бінарний граф.*

Вступ

Оцінка складності булевих функцій є першим кроком при їх оптимізації. Дослідження показали, що статичними показниками оцінки складності булевої функції є такі, які не використовують для свого обчислення статистичні параметри аргументів, що входять у формули [1 − 3]. Найпростішим статичним показником оцінки складності булевої функції є число аргументів у ній. Другим відомим критерієм статичної складності булевої функції є повне число M двійкових наборів довжини n, що відтворюють таблицю істинності, реалізовану булевою формулою. Причому $M = 2^k$, де k – число аргументів булевої функції. Більш повним критерієм є об'єм V таблиці істинності $V = n\,M = n\,2^k$ [1]. Таблиця істинності показує повний набір тестів, які перевіряють програму, що реалізує булеву функцію. Існує менший по об'єму мінімальний набір тестів – ортогональна форма (ортогональна диз'юнктивна нормальна форма й інверсія ортогональної диз'юнктивної нормальної форми). Кількість кон'юнкції у цих двох формах подання булевої функції відповідає числу маршрутів у лінійному бінарному графі, що програмно реалізує задану булеву функцію, тому що це є мінімальний тест, який перевіряє програму [2]. При цьому кожна кон'юнкція ортогональної диз'юнктивної нормальної форми показує одиничний маршрут у лінійному бінарному графі, а в інверсії ортогональній диз'юнктивній нормальній формі – нульовий маршрут. В [1] показано, що перерахування всіх маршрутів лінійного бінарного графа є покриттям повної таблиці істинності.

Постановка проблеми. Підрахунок числа Q маршрутів без їх безпосереднього одержання у вигляді ортогональної диз'юнктивної нормальної форми й інверсії ортогональної диз'юнктивної нормальної форми здійснюється різними способами. Метод Флойда [1] складається в піднесенні в ступінь матриці суміжності графа, що є досить трудомістким. Другим відомим алгоритмом є алгоритм Дейкстри [1]. Але і цей алгоритм не враховує специфіку бінарних програм і, тим більше, лінійного бінарного графа – також трудомісткісті. Тому в [2] запропоновані більш ефективні алгоритми підрахунку маршрутів у лінійних бінарних графах без їхньої безпосередньої побудови.

Алгоритми базуються на відомому підході Акерса [2] та на поетапному підрахунку числа маршрутів, починаючи з виходів лінійного бінарного графа. Даний підхід має той недолік, що підраховується тільки загальне число маршрутів у лінійному бінарному графі без поділу на число одиничних і нульових маршрутів.

Розділ основного матеріалу

Розглянемо алгоритм, що усуває даний недолік.

Алгоритм 1. Підрахунок числа маршрутів у лінійних бінарних графах.

1. begin.

2. Одиничний вихід лінійного бінарного графа позначимо дробом 1/0, нульовий – 0/1.

3. $i = k$.

4. i-ту вершину позначаємо дробом a/b, де $a = a0 + a1$, $b = b0 + b1$, $a1$ – чисельник дробу, що позначає одиничну дугу, що виходить із даної вершини, $a0$ – чисельник дробу, що позначає нульову дугу, що виходить із даної вершини, $b1$ і $b0$ – знаменники зазначених дробів, відповідно.

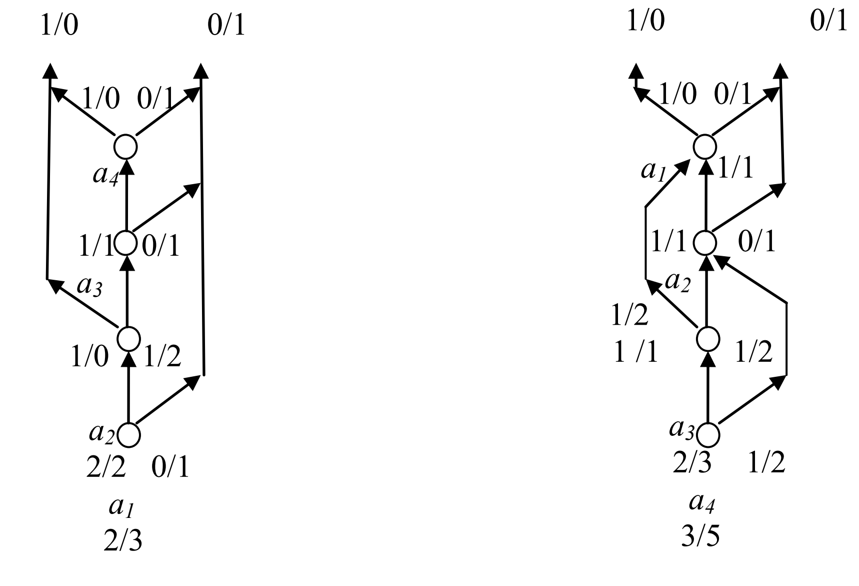
5. if $i > 1$, то кожну дугу, що заходить в i-ту вершину, позначаємо отриманою в попередньому пункті дробом a / b і go to п. 6, then – до п. 6.

6. $i = i - 1$. go to п. 4.

7. Дріб, що позначає першу вершину, відображає число одиничних і нульових маршрутів, склавши ці числа, одержимо загальне число маршрутів у лінійних бінарних графах.

8. end.

Приклад підрахунку кількості маршрутів по даному алгоритму представлений на рис. 1. Для випадку, коли аргументам булевої функції відповідають вкладені булеві функції, тобто формулі відповідає блоковий лінійний бінарний граф, запропонуємо модифікацію вище наведеного алгоритму. При цьому кожному аргументу функції, тобто вершині лінійного бінарного графа, відповідає дріб $d1 / d0$, що задає число одиничних і нульових маршрутів, відповідно, у лінійному бінарному графі, що реалізує відповідну внутрішню функцію заданої функції.



$b = a_1(a_2 \vee a_3 a_4)$ $\qquad$ $b = a_1(a_2 \vee a_3 a_4)$

Рис. 1. Граф обчислення кількості маршрутів

Алгоритм 2. Підрахунок кількості маршрутів у блоковому лінійному бінарному графі.

1. begin.

2. Одиничний вихід лінійного бінарного графа позначимо дробом $1 / 0$, нульовий – $0 / 1$.

3. $i = k$.

4. i-ту вершину позначаємо дробом a / b, де $a = (a0 + a1)\, d1$, $b = (b0 + b1)\, b0$, $a1$ – чисельник дробу, що позначає одиничну дугу, що виходить із даної вершини, $a0$ – чисельник дробу, що позначає нульову дугу, що виходить із даної вершини, $b1$ і $b0$ – знаменники зазначених дробів, відповідно; $d1$ і $d0$ – чисельник і знаменник дробу, що відповідає вкладеному в i-ту вершину лінійного бінарного графа.

5. if $i > 1$, then кожну дугу, що заходить в i-ту вершину позначаємо отриману в попередньому пункті дробом a / b go to п. 6, інакше – до п. 7.

6. $i = i - 1$. go to п. 4.

7. Дріб, що позначає першу вершину, відображає число одиничних (чисельник) і нульових (знаменник) маршрутів, склавши ці числа, одержимо загальне число маршрутів у лінійному бінарному графі.

8. end.

Загальна довжина маршрутів у лінійному бінарному графі є наступним важливим критерієм оцінки статичної складності моделі. Значенню цього критерію L відповідає також загальне число аргументів в ортогональній формі (ортогональна диз'юнктивна нормальна форма й інверсія ортогональної диз'юнктивної нормальної форми), тобто L визначає об'єм найменшої тестової послідовності. У роботі [1] отримані наступні оцінки для сумарної довжини L(k) маршрутів у лінійному бінарному графі, що реалізують довільні булеві формули:

$$\frac{1}{2}k(k+3) \le L(k) \le 2k\,\Phi_k . \qquad (1)$$

Як слідує з останнього співвідношення, верхня оцінка для загальної довжини шляхів також визначається через числа Фібоначчі Φ_k. При цьому як нижні, так і верхні оцінки числа й загальної довжини маршрутів досяжні для різних перестановок булевих формул вигляду (1).

Третім критерієм статичної складності булевих функцій будемо вважати похідну величину від загальної довжини маршрутів і числа маршрутів у лінійному бінарному графі, а саме – середню довжину $l_{cp}(k)$ маршруту

$$\frac{k(k+3)}{2(k+1)} \le l_{cp}(k) = \frac{L(k)}{Q(k)} \le \frac{2k\,\Phi_k}{\Phi_{k+2}} . \qquad (2)$$

Мінімальна довжина l_{min} маршруту в довільному лінійному бінарному графі визначається співвідношенням

$$1 \le l_{min} \le (k+1)/2 . \qquad (5)$$

Висновок

Таким чином, запропоновано нові алгоритми статичної оцінки складності булевих функцій через підрахунок кількості маршрутів в лінійному бінарному графі − моделі булевої формули, які не мають недоліків, що були відомі раніше. Подальшим розвитком критеріїв оцінки складності булевих формул, на наш погляд, є впровадження теорії нечіткої логіки в цю галузь наукових досліджень.

Список літератури

1. *Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами , К. Тхуласираман. − М.: Мир, 1984. − 455 с.*
2. *Кузнецов Б.П. Реализация булевых формул линейными бинарными графами. Синтез и анализ / Б.П. Кузнецов, А.А. Шалыто // Известия РАН. Техническая кибернетика. − 1994. − № 5. − С. 132-142.*
3. *Кузнецов Б.П. Реализация булевых формул линейными бинарными графами. Оптимизация числа и суммарной длины путей / Б.П. Кузнецов, А.А. Шалыто // Известия РАН. Теория и системы управления. − 1995. − № 5. − С. 214-223.*

Надійшла до редколегії 2.09.2010

Рекомендовано до друку центром дистанційного навчання інституту інформаційних технологій.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.В. Кравченко, інститут інформаційних технологій Національного університету оборони України, Київ.

СТАТИЧНАЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО БИНАРНОГО ГРАФА

А.Г. Оксиюк

Предложены алгоритмы определения значения показателей критериев статичной сложности булевых функции.

Ключевые слова: *булева функция, линейный бинарный граф*.

THE STATIC COMPLEXITY ESTIMATION OF BOOLEAN FUNCTIONS ON LINEAR BINARY GRAPH

O.G. Oxijuk

The article highlights the algorithms for criteria complexity estimation of Boolean functions.

Keywords: *Boolean function, linear binary graph*.