УДК 336.767:519.865

В.Ю. Дубницький, Б.В. Самородов

Харківський інститут банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України

ОДНОЧАСНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОЇ І ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ МАРКОВІЦА ПОШУКОВИМ МЕТОДОМ

Для формування портфелю цінних паперів, який водночас задовольняє критеріям максимальної ефективності та мінімального ризику, запропонована модель у вигляді задачі векторної оптимізації. Розв'язання задачі здійснено комбінованим методом, на першому етапі якого використано випадковий пошук, на другому – симплекс, що деформується в процесі пошуку.

***Ключові слова**: задача Марковіца, багатокритеріальний пошук, векторна оптимізація, пошукові методи, метод штрафних функцій, пошук умовного та безумовного екстремуму.*

Вступ

Постановка проблеми. Задача формування портфелю активів (цінних паперів) – одна з класичних задач фінансового менеджменту [1]. На вербальному рівні проблему можна сформувати так:

– з наявних активів треба сформувати портфель найменшим ризиком (задача 1);

– з наявних активів треба сформувати портфель найменшого ризику з гарантованою ефективністю (задача 2);

– з наявних активів треба сформувати портфель найбільшої ефективності (задача 3);

– з наявних активів треба сформувати портфель найбільшої ефективності з верхньою межею ризику (гарантованим ризиком) (задача 4).

В публікаціях, в яких розглянуті ці задачі, наприклад [1, 2], велика увага приділена економічному змісту задачі. Значно менше уваги приділено аналізу чисельних алгоритмів розв'язання задачі. На наш погляд це пов'язано з тим, що для розв'язання використовують популярні пакети програмних засобів, в яких реалізовані пакети математичного програмування, чисельні особливості реалізації яких невідомі користувачеві. Таким чином виникає ситуація, коли отриманий чисельний результат буде достатньо віддалений від точки оптимуму, або зовсім хибним.

В зв'язку з цим виникає проблема створення нескладного, але дієвого алгоритму розв'язання задачі створення портфелю активів. Цей портфель повинен бути сталим по відношенню до похибок, властивих будь-яким чисельним методам та похибок обумовлених статистичними властивостями даних.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [1], а також в усіх наступних, наприклад [2,3], прийняті такі припущення. Портфель формують з n наявних видів активів, $n < \infty$. Питома вага активу j-го виду ($j = \overline{1,n}$) дорівнює величині x_j. Ефективність (прибутковість) паперів кожного виду є випадковою величиною ε_j з оціненими по виборці характеристиками математичного сподівання m_j та дисперсією δ_j^2. Залежність між цінними паперами видів i та j вимірюють їх коваріацією V_{ij} або кореляцією $r_{ij} = V_{ij}\delta_i\delta_j$.

Тоді задача 1 може бути подана у такому вигляді:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_i x_j \to \min\ ; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\ ; \tag{2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\ . \tag{3}$$

В умові (1) використана та обставина, що $V_{ij} = \delta_i^2$. Задача (1) може бути розв'язана за допомогою множників Лагранжа. Для цього розглянемо розв'язання задачі (1)-(3) у матричній формі:

$$L = X^T V X + \lambda\left(I^T X - 1\right)\ ; \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2VX + \lambda I = 0\ ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I^T X - 1 = 0\ . \tag{6}$$

Тоді отримаємо систему:

$$\begin{pmatrix} 2V & I \\ I^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

У матричній формі її розв'язання буде таким:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2V & I \\ I^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Розглянемо задачу 2:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_i x_j \to \min\ ; \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\ ; \tag{10}$$

$$E = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j \ge g\ ; \tag{11}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\ . \tag{12}$$

Припустимо з початку, що умова (11) має вигляд рівняння:

$$E = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j = g\ . \tag{13}$$

Тоді, використовуючи множники Лагранжа, маємо:

$$L\left(X,\lambda_1,\lambda_2\right) = X^T V X + \lambda_1\left(M^T X - g\right) + \lambda_2\left(I^T X - 1\right). \tag{14}$$

В умові (14) прийнято, що

$$M^T = (m_1, m_2, ..., m_n)..$$

Тоді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X} = 2VX + \lambda_1 g + \lambda_2 I = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = M^T X - g = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = I^T X - 1 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Для розв'язання системи (15) отримаємо систему рівнянь, яка у матричному вигляді буде такою:

$$\begin{pmatrix} 2V & M & I \\ M^T & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Розв'язання цієї системи буде таким:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2V & M & I \\ M^T & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Загальним для чисельного процесу розв'язання задачі 1 та задачі 2 є необхідність обчислення оберненої матриці. Для задачі 2 це необхідно і в тому випадку, коли обмеження (13) має форму (12), бо ця операція обернення матриці є складовою частиною будь-якого з регулярних методів розв'язання задачі математичного програмування.

Розглянемо задачу (3):

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \to \max\ ; \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j < W_0\ ; \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\ ; \tag{20}$$

при виконанні умови $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$.

Розглянемо задачу 4:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min\ ; \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \ge M_0\ ; \tag{22}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\ . \tag{23}$$

На наш погляд суттєвим недоліком застосування регулярних методів пошуку екстремуму для розв'язання задачі Марковіца є наступне. В зв'язку з тим, що математичне сподівання прибутковості кожного з активів та кореляційну (коваріаційну) матрицю визначають по вибірковим даним виникають помилки, пов'язані з кінцевим обсягом вибірки. Іншим чинником помилок є процедура обернення матриці коваріації. При сильному взаємному впливі активів це може привести до погано обумовленої матриці. Тому для розв'язання задач 1-4 бажано використовувати пошукові методи, які не потребують процедуру обернення матриці.

В узагальненому вигляді задачі (1)-(4) можна подати у наступному вигляді:

$$L = F\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \to \text{extr}\ ; \tag{24}$$

$$Z\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) > (<0)\, Z_0 \tag{25}$$

або

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = 0; \qquad (26)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1; \qquad (27)$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, m}. \qquad (28)$$

Для розв’язання задачі (24) – (28) розроблено алгоритм, основою якого є комбінація методів випадкового пошуку на першому етапі та деформованого многогранника на другому.

Розглянемо детальніше перший етап розв'язання задачі. Мета цього етапу так визначити можливу множину значень змінної X, щоб виконувались обмеження задачі. Таким чином від задачі визначення умовного екстремуму перейдемо до більш простої задачі – пошуку безумовного екстремуму.

Перший етап алгоритму складається з декілька кроків:

1 крок. На цьому кроці генерують матрицю D вимірності ($k \times n$), де k – кількість реалізацій першого кроку, $k \approx 10^3 \cdot n$. Кожний рядок цієї матриці містить n рівномірно розподілених випадкових чисел $\varepsilon_{ij}, \ j = \overline{1, n}, \ i = \overline{1, k}, \ \forall \varepsilon_{ij} \in [0;1]$.

2 крок. На цьому кроці формують матрицю D_1 вимірності ($k \times n$). Кожний її елемент визначають за формулою:

$$d_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}}, \ i = \overline{1, k}. \qquad (29)$$

Внаслідок такого нормування отримаємо матрицю, кожний рядок якої моделює портфель активів деякого змісту.

3 крок. На цьому кроці формують матрицю $D_{об}$, кожний рядок якої задовольняє прийнятим обмеженням.

Якщо умова (26) необхідна замість умови (25), то цей крок не використовують і переходять до другого етапу алгоритму. Якщо умова (26) непотрібна, а необхідна умова (25), то далі поступають таким чином.

Згідно умови (24) формують матрицю D_2 вимірності ($k \times (n+2)$). В цій матриці $(n+1)$ стовбець відповідає умові (24), а $(n+2)$ стовбець – умові (25). Для подальших розрахунків заповнюють матрицю D_p вимірності ($c \times (n+2)$), де $c \le k$. Таким чином, в матриці D_p залишають тільки ті рядки, які задовольняють обмеженням задачі. Матриця D_p є основною для другого етапу роботи алгоритму.

На другому етапі пошук мінімуму умови (24) проводили модифікованим методом Спендлі-Хекста-Хімсворта, основні положення якого розглянуто нами в роботі [4]. Розглянемо цей алгоритм більш детально.

У загальному n-вимірному випадку для зміщеного (щодо регулярного гіпермногогранника, перша вершина якого співпадає з початком координат і центром тяжіння $x^{(C)}$) в просторі гіпермногогранника з центром в початковій точці $x^{(0)}$ матриця D' має вигляд

$$D' = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} - x_1^{(c)} & x_1^{(0)} - x_1^{(c)} + d_1 & x_1^{(0)} - x_1^{(c)} + d_2 & ... & x_1^{(0)} - x_1^{(c)} + d_2 \\ x_2^{(0)} - x_2^{(c)} & x_2^{(0)} - x_2^{(c)} + d_2 & x_2^{(0)} - x_2^{(c)} + d_1 & ... & x_2^{(0)} - x_2^{(c)} + d_2 \\ x_3^{(0)} - x_3^{(c)} & x_3^{(0)} - x_3^{(c)} + d_2 & x_3^{(0)} - x_3^{(c)} + d_2 & ... & x_3^{(0)} - x_3^{(c)} + d_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_n^{(0)} - x_n^{(c)} & x_n^{(0)} - x_n^{(c)} + d_2 & x_n^{(0)} - x_n^{(c)} + d_2 & ... & x_n^{(0)} - x_n^{(c)} + d_1 \end{bmatrix}, \qquad (30)$$

де

$$d_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} + n - 1\right); \qquad (31)$$

$$d_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} - 1\right), \qquad (32)$$

тут t – відстань між двома вершинами.

Координати центру тяжіння регулярного (правильного) гіпермногогранника, перша вершина якого співпадає з початком координат, мають вигляд:

$$x^{(c)} = \left(\frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}; \ \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}; ...; \ \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}\right) = \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}(1; \ 1; \ ... \ ;1).$$

З урахуванням співвідношень для d_1 (31) і d_2 (32) координати центру тяжіння $x^{(C)}$ можна виразити через величину t ребра гіпермногогранника

$$x_1^{(c)} = x_2^{(c)} = ... = x_n^{(c)} = = \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1} = \frac{t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1}} = \Delta.$$

Тоді матриця (30) приймає вигляд:

$$D' = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} - \Delta & x_1^{(0)} - \Delta + d_1 & x_1^{(0)} - \Delta + d_2 & ... & x_1^{(0)} - \Delta + d_2 \\ x_2^{(0)} - \Delta & x_2^{(0)} - \Delta + d_2 & x_2^{(0)} - \Delta + d_1 & ... & x_2^{(0)} - \Delta + d_2 \\ x_3^{(0)} - \Delta & x_3^{(0)} - \Delta + d_2 & x_3^{(0)} - \Delta + d_2 & ... & x_3^{(0)} - \Delta + d_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_n^{(0)} - \Delta & x_n^{(0)} - \Delta + d_2 & x_n^{(0)} - \Delta + d_2 & ... & x_n^{(0)} - \Delta + d_1 \end{bmatrix}. \qquad (33)$$

При такій гомотетії точка нульового наближення $x^{(0)}$ – центр гіперсфери співпадає з центром тяжіння $x^{(C^*)}$ регулярного гіпермногогранника.

Радіус a^* гіперсфери, що описана навколо регулярного гіпермногогранника, з урахуванням (33)

$$a^* = \left| x^{(c)} - x^{(0)} \right| = = \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}\sqrt{n} = \frac{t}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n+1}}\sqrt{n} = \Delta\sqrt{n}. \quad (34)$$

Розмір t "ребра" гіпермногогранника пов'язаний з радіусом a^* гіперсфери і дорівнює

$$t = \frac{a^*}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{n+1}\,. \quad (35)$$

При великих n маємо:

$$t = a\cdot\sqrt{2}\,. \quad (36)$$

Значення відносної помилки визначення "ребра" гіпермногогранника наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Визначення відносної помилки визначення "ребра" гіпермногогранника

Кількість активів,n	6	10	20	25	30	40
Відносна помилка, ε%	8	4,8	2,6	2,1	2	1,2

Економічний зміст даного результату може бути таким . Збільшення кількості різновидів активів більше ніж сорок істотно не впливає на якісний результат розв'язання задачі. Зауважимо, що отримати цей результат при використанні регулярних методів можна тільки при великій кількості чисельних експериментів.

Всі (n + 1) вершини гіпермногогранника лежать на поверхні гіперсфери з радіусом a^* та мають координати згідно матриці (34).

Таким чином, маємо $n + 1$ напрямок пошуку $x^{(i)} - x^{(0)}$ ($i = \overline{1, n+1}$) мінімуму функції f(x), що визначаються вершинами з координатами $x^{(i)}$ і центром гіперсфери $x^{(0)}$ – точкою нульового наближення.

З метою збільшення кількості напрямків пошуку мінімуму функції до числа 2(n + 1) пропонується додатково використовувати n + 1 напрямки, протилежні напрямкам $x^{(i)} - x^{(0)}$, які очевидно проходять через центри тяжіння граней, "протилежних" відповідним вершинам гіпермногогранника. Перетин прямих в E^n, що проходять від точки $x^{(i)}$ через $x^{(0)}$ з гіперсферою саме і дають n + 1 додаткових точок для пробних обчислень функції f(x) і виявлення найбільш вдалого напрямку пошуку мінімуму тепер уже на множині 2(n + 1) рівноправних (рівнозначних) напрямків.

Для n-мірного випадку додаткові n+1 точки, що лежать на поверхні гіперсфери у напрямках від вершин гіпермногогранника через $x^{(0)}$ (початкову точку – центр тяжіння гіпермногогранника) для $k = \overline{n+2,\ 2\cdot(n+1)}$, ідентифікуються так

$$x^{(k)} = x^{(k-(n+1))} + 2\cdot\left(x^{(0)} - x^{(k-(n+1))}\right) = = x^{(k-(n+1))} + 2x^{(0)} - 2x^{(k-(n+1))} = 2x^{(0)} - x^{(k-(n+1))}. \quad (37)$$

У результаті для оцінки функції маємо (n + 1) вершин з координатами згідно матриці D' (14) плюс (n + 1) точки $x^{(k)}$, що лежать на поверхні гіперсфери. Іншими словами, побудовано гіпермногогранник з 2(n + 1) вершинами, який вписано в гіперсферу заданого радіусу a^* (37), в якому усі напрямки від центру тяжіння до усіх вершин рівноправні в E^n. Далі, по алгоритму, визначаються значення функції в усіх 2(n + 1) точках, що лежать на гіперсфері і ідентифікується точка $x^{(min)}$, в якій значення функції мінімально. Визначається приоритетний напрямок $(x^{(min)} - x^{(C^*)})$, уздовж якого для $x = x^{(C^*)} + \lambda(x^{(min)} - x^{(C^*)}$ здійснюється одномірний пошук, доки f(x) зменшується. На цьому напрямку у деякій точці $x^{(\lambda)}$ функція $f(x^{(\lambda)}) > f_{min}$ при $f(x^{(\lambda-1)}) = f_{min}$, тоді в точці $x^{(\lambda-1)}$ як у центрі з координатами $x^{(C^*)}$ знову будується гіперсфера з вписаним до неї гіпермногогранником з 2(n + 1) вершинами і алгоритм повторюється аналогічно до описаного вище. Радіус a* гіперсфери пропонується зменшувати, якщо мінімальне значення функції знаходиться всередині гіперсфери у випадку, коли $f(x^{(i)}) \geq f(x^{(C^*)})$ для усіх $i = \overline{1, 2\cdot(n+1)}$. Вихід із алгоритму по точності має наступний вигляд:

$$\sqrt{\frac{1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{2(n+1)}\left[f\left(x^{(i)}\right) - f\left(x^{(C^*)}\right)\right]^2} \leq \varepsilon\,. \quad (38)$$

Іншими словами ідею запропонованої модифікації можна описати так: навколо точки $x^{(0)}$ нульового наближення як у центрі тяжіння в E^n будується правильний гіпермногогранник, що вписаний в гіперсферу завдяки гомотетії регулярного симплексу з (n + 1) вершинами і для пошуку найбільш вдалого напрямку руху до мінімуму використовуються 2(n + 1) рівноправних напрямків, що визначаються (n+1) вершинами гіпермногогранника, (n+1) геометричними центрами його граней і його центром тяжіння $x^{(0)}$. У вдалому напрямку проводиться одномірний пошук мінімуму, точка $x^{(C^*)}$ якого приймається як центр тяжіння нового гіпермногогранника, що вписаний в гіперсферу зменшеного радіусу. Процедура повторюється, поки гіпермногогранник, що зменшується, не "накриє" мінімум функції з точки зору заданої точності ε (38).

В роботах [2, 4 – 6] розглянуто постановку задачі Марковіца, як задачі векторної оптимізації, а саме:

$$L_1 = V^T X V \to \min\,; \quad (39)$$

$$L_2 = M^T X \to \max\,; \quad (40)$$

$$I^T X = 1\,. \quad (41)$$

На наш погляд, більш реалістичною є задача у такому вигляді:

$$L_1 = V^T XV \to \min ; \quad (43)$$

$$L_2 = M^T X \to \max ; \quad (44)$$

$$M^T X \le M_0 ; \quad (45)$$

$$V^T XV \ge R_0 ; \quad (46)$$

$$I^T X = 1 . \quad (47)$$

Тобто умови (43) – (47) означають, що необхідно створити портфель, який мав би найменший ризик з усіх можливих, найбільшу прибутковість з усіх можливих при гарантованій нижній межі прибутковості та гарантованої верхній межі ризику. Для цього в роботі використано алгоритм, оснований на результатах, опублікованих в [6].

Роботу алгоритму розглянемо у найбільш важливому випадку: задачі (43) – (47). Ці умови формують задачу Марковіца як задачу векторної оптимізації. Умови (43), (45), (47) відповідають задачі 4, умови (44), (46), (47) – задачі 3. Розв'язки цих задач назвемо відповідно I_4 та I_3.

Для зведення задачі векторної оптимізації к традиційній задачі безумовного пошуку екстремуму новий критерій оптимальності запишемо у такому вигляді:

$$U = \left\| \frac{I(X) - I_3(X)}{I_3(X)} \right\|^2 + \left\| \frac{I(X) - I_4(X)}{I_4(X)} \right\|^2 \to \min \quad (48)$$

з обмеженнями у вигляді (45) та (46).

Для її розв'язання розглянемо викладено вище методику, адаптовану до умов нової задачі. Ця адаптація полягає у тому, що матриця $D_{об}$ буде мати вимірність $k \times (n+2)$, а все інше залишиться без змін.

Висновки

1. Показано, що розв'язання прямої та зворотної задачі Марковіца регулярним методом є некоректною в сенсі А.Н. Тихонова, бо пов'язана з обчисленням зворотної матриці коваріації (кореляції), яка в умовах залежних активів є погано обумовленою.

2. Запропоновано пошуковий алгоритм розв'язання прямої та зворотної задачі Марковіца.

3. Запропоновано пошуковий алгоритм розв'язання багатокритеріальної задачі Марковіца.

4. Показано, що збільшення кількості активів більше, ніж сорок, істотно не впливає на результат розв'язання задачі.

Список літератури

1. *Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. – М.: ИНФРА-М, 2001-XII. – 1028 с.*
2. *Капитоненко В.В. Финансовая математика и её приложения / В.В. Капитоненко. – М.: ПРИОР, 1999. – 144 с.*
3. *Бронштейн Е.М. Задача формирования оптимального портфеля акций и облигаций с учётом трансакционных издержек / Е.М. Бронштейн, С. Рачев // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. XI, № 4 (36). – С. 25-33.*
4. *Дубницький В.Ю.. Визначення параметрів виробничої функції із сталою еластичністю заміни / В.Ю. Дубницький, Б.В. Самородов // Системи обробки інформації: зб. наук.пр. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 7 (74). – С. 169-173.*
5. *Баева Н.Б. Основы теории и вычислительные схемы векторной оптимизации / Н.Б. Баева, Ю.В. Бондаренко. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. – 86 с.*
6. *Мищенко А.В. Двухкритериальная задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях ограничения на финансовые ресурсы / А.В. Мищенко, А.А. Попов // Менеджмент в России и за рубежом. – 2001. – № 1. – С. 36-43.*
7. *Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления / М.Е. Салуквадзе. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – 201 с.*

Надійшла до редколегії 3.11.2010

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харківський державний технічний університет будівництва та архітектури, Харків.

ОДНОВРЕМЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАРКОВИЦА ПОИСКОВЫМ МЕТОДОМ

В.Ю. Дубницкий, Б.В. Самородов

Для формирования портфеля ценных бумаг, который в то же время удовлетворяет критериям максимальной эффективности и минимального риска, предложена модель в виде задачи векторной оптимизации. Решение задачи осуществлено комбинированным методом, на первом этапе которого использован случайный поиск, на втором – симплекс, который деформируется в процессе поиска.

***Ключевые слова**: задача Марковица, многокритериальный поиск, векторная оптимизация, поисковые методы, метод штрафных функций, поиск условного и безусловного экстремума.*

SIMULTANEOUS DECISION OF DIRECT AND REVERSE TASK OF MARKOVITS BY SEARCHING METHOD

V.Yu. Dubnitskiy, B.V. Samorodov

For a portfolio of securities, which at the same time satisfies the criteria of maximal efficiency and minimum risk, construction, a model is offered as a task of vectorial optimization. The decision of task is carried out the combined method, on the first stage of which a random search is used, on the second is simplex which is deformed in the process of search.

***Keywords**: task of Markovits, multicriterion search, vectorial optimization, searching methods, method of functions of fines, search of conditional and absolute extremum.*