УДК 623.618

С.А. Олизаренко, Е.В. Брежнев, А.В. Перепелица

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА ТИПА 2. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В работе дан анализ существующих подходов к определению и представлению нечетких множеств типа 2 с целью формирования единого понятийного аппарата (терминологии) и форм представления этих множеств. Рассмотренные терминология и представления нечетких множеств типа 2 являются основой для их более глубокого понимания и последующего представления, изучения и исследования базовых операций над этими множествами.

Ключевые слова: *нечеткое множество типа 2, нечеткая функция принадлежности, занимаемая площадь неопределенности.*

Введение

Постановка проблемы. Несмотря на то, что понятие нечеткого множества типа 2 (*type-2 fuzzy set* (*T2 FS*)), как нечеткого множества с нечеткими функциями принадлежности, было определено Л.А. Заде (L.A. Zadeh) еще в 1974г. в работе [1], и что за последнее десятилетие бурное развитие в области нечетких множеств типа 2 получили идеи таких авторов как Дж.М. Менделя (J.M. Mendel), Р.И. Джона (R.I. John), Н.Н. Карника (N.N. Karnik) и их последователей [2, 6], в настоящее время в немногочисленных отечественных авторских и переводных публикациях по нечетким множествам типа 2, например, [14 – 16], отсутствует единый базовый подход как и к определению основных математических элементов нечетких множеств типа 2, так и к определению множества теоретических операций над ними (в том числе с позиций точного и однозначно понимаемого перевода соответствующего понятийного аппарата), не проанализирован процесс эволюционного развития идей в области нечетких множеств типа 2 от первых публикаций Л. Заде до публикаций последних лет.

Анализ литературы. При анализе литературы акцент делался, в первую очередь, на фундаментальные публикации, в которых представлены в хронологическом порядке результаты исследований, непосредственно повлиявшие на развитие нечетких множеств типа 2, а не являющиеся реферативным (как правило, ознакомительным и в общем виде) изложением соответствующего материала. В первую очередь это [1], где представлена базовая концепция нечетких множеств типа 2 как расширение обычного нечеткого множества или нечеткого множества первого типа (предмет исследования данной статьи). В работах [3, 4], на основе идей, предложенных в [1], введено более строгое определение нечетких множеств типа 2 (предмет исследования данной статьи), исследуются теоретические операции с нечеткими множествами типа 2, свойства их функций принадлежности. В [5] предлагается более детальный обзор алгебраической структуры нечетких множеств типа 2. В работах [2, 6, 7, 8, 9, 10] предложены новые подходы к определению и формам представления нечетких множеств типа 2 (предмет исследования данной статьи), разработаны практические алгоритмы для операций над нечеткими множествами типа 2 на основе новой парадигмы их определения и представления, представлена теория логических систем, использующих нечеткие множества типа 2. С более полным перечнем публикаций о нечетких множествах типа 2 и их приложениях (около 290 публикаций) можно ознакомиться на сайте «http://sipi2b.usc.edu/~mendel/» в перечне ссылок «References for Type-2 Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Systems», подготовленном Дж.М. Менделем.

Целью статьи является представление с единых позиций нечетких теоретико-множественных представлений и терминологии нечетких множеств типа 2, что позволит более строго подойти к вопросам их использования, например, при рассмотрении операций над нечеткими множествами типа 2, а также в дальнейшем при применении этих множеств для решения различных практических задач.

Основная часть

Концептуальное определение нечетких множеств типа 2 (НМТ2) и других обобщений нечетких множеств более высокого порядка впервые было введено Заде в работе [1].

Определение 1. Нечеткое подмножество универсального множества X есть нечеткое множество типа 2, если значениями его функции принадлежности являются нечеткие подмножества интервала $[0,1]$.

В работе [1] введено общее определение для нечетких множеств n-го порядка, где $n=2, 3, \ldots$.

Определение 2. Нечеткое множество есть множество типа n, $n=2, 3, \ldots$, если значениями его функции принадлежности являются нечеткие множества типа $n-1$. Функция принадлежности нечеткого множества типа 1 (НМТ1) принимает значения из интервала $[0,1]$.

В дальнейшем, в рамках данной статьи, будут рассматриваться только НМТ2. При этом авторы статьи исходят из того, что читатели обладают знаниями по НМТ1.

В работах [3, 4] дано определение НМТ2 через формальное представление его функции принадлежности в виде соответствующего отображения.

Определение 3. Нечеткое множество типа 2, которое обозначим как $\tilde{A}$, на множестве X это нечеткое множество, которое характеризуется нечеткой функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]^{J} \tag{1}$$

со значением $\mu_{\tilde{A}}(x)$, называемым нечеткой степенью (нечеткой степенью принадлежности) и представляющим собой НМТ1 на множестве $J \subseteq [0,1]$. Исходя из определения 1, выражения (1) и того, что нечеткое множество вполне определяется своей функцией принадлежности, универсальное множество X будем рассматривать не только как область определения функции, но и как область определения НМТ2 $\tilde{A}$.

В общем случае, если L, V некоторые множества, то выражение L^{V} представляет собой множество отображений f, областью определения которых является множество V, областью значений множество L [11]:

$$L^{V} = \{ f \mid f : V \to L \}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u} \frac{f_x(u)}{u},\ u \in J_x \subseteq U = [0,1],\ f_x : J_x \to [0,1]. \tag{3}$$

В работах [3, 4], по аналогии с НМТ1, нечеткая степень $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для конечного множества J представляется как

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{f_x(u_1)}{u_1} + \frac{f_x(u_2)}{u_2} + \ldots + \frac{f_x(u_M)}{u_M} = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_x(u_i)}{u_i}, \tag{4}$$
$$u_i \in J_x \subseteq U = [0,1],\ f_x : J_x \to [0,1].$$

Нечеткая степень $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для бесконечного множества J представляется как

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u} \frac{f_x(u)}{u},\ u \in J_x \subseteq U = [0,1],\ f_x : J_x \to [0,1]. \tag{5}$$

В дальнейшем, с целью упрощения, выражение $J_x \subseteq U = [0,1]$ будем записывать как $J_x \subseteq [0,1]$.

Отметим, что уже в работе [1] были впервые определены такие основные операции, как дополнение, объединение, пересечение и т.д., для НМТ2 с использованием принципа обобщения (детальное рассмотрение операций для НМТ2, в том числе на основе использования подходов отличных от принципа обобщения, является предметом исследования следующей статьи). При этом, определение операций выполняется в два этапа: сначала обобщаются соответствующие определения для НМТ1 на нечеткие множества с функциями принадлежности, значениями которых являются интервалы, а затем, используя принцип обобщения в форме множеств уровня, осуществляется переход от интервалов к нечетким множествам. Данный подход, а именно, переход от НМТ1 к нечетким множествам с функциями принадлежности, значениями которых являются интервалы, а затем к НМТ2, применим и в случае решения задачи графического представления НМТ2.

Нечеткие множества A с функциями принадлежности, значениями которых являются интервалы, используются в том случае, когда вместо указания значения функции принадлежности в виде точечного значения (вещественного числа из $[0,1]$, как в НМТ1) с помощью верхнего и нижнего значений задают допустимые пределы приблизительной оценки принадлежности некоторого элемента к нечеткому множеству [1, 11]. На рис. 1 показан пример графического представления функции принадлежности μ_A, значениями которой являются интервалы $[u_i, u_j]$ в $[0,1]$, т.е. $\mu_A(x_k) = [u_i, u_j]$. Согласно [1] нечеткие множества подобного типа являются выпуклыми, т.е. нечеткое множество A является выпуклым, если и только если множества Γ_α определяются как [12]:

$$\Gamma_\alpha = \{ x; \mu_A(x) \ge \alpha \}. \tag{6}$$

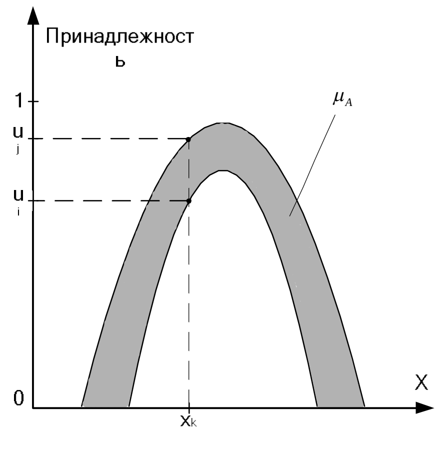

Рис. 1. Пример графического представления функции принадлежности, значениями которой являются интервалы

Если необходима дополнительная оценка самих значений из интервала $[u_i, u_j]$, то переходим к понятию НМТ2, значениями функции принадлежности которой являются НМТ1 (см. выражения (4), (5)). На рис. 2 показан пример графического представления элементов функции принадлежности, значениями которой являются, например, нечеткие степени $\mu_{\tilde{A}}(x_l)$ и $\mu_{\tilde{A}}(x_k)$. При этом, в общем случае, требования по ограничению вида функций принадлежности нечетких степеней, как функций принадлежности НМТ1, не выдвигаются. Совокупность всех подобных нечетких степеней, определенных на $J \subseteq [0,1]$ позволяет представить НМТ2 $\tilde{A}$ как множество пар

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \right); x \in X \right\}. \qquad (7)$$

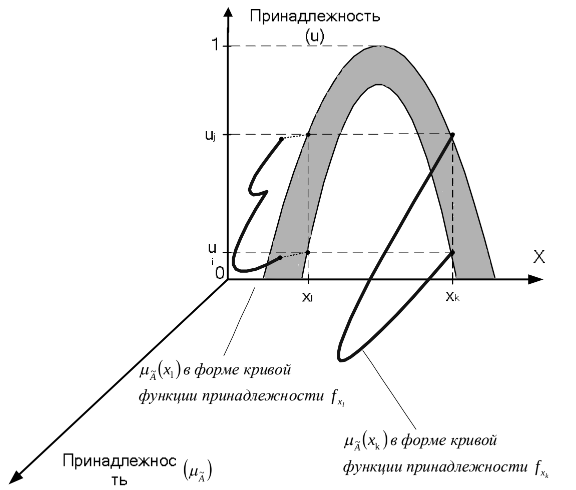

Рис. 2. Пример графического представления элементов нечеткой функции принадлежности

Исходя из выражения (4), можно представить НМТ2 $\tilde{A}$ как

$$\tilde{A} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[\sum_{i=1}^{M_j} \frac{f_x(u_i)}{u_i} \right]}{x_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_j)}{x_j}, \qquad (8)$$

$$u_i \in J_x \subseteq [0,1],\ x_j \in X,$$

или, исходя из выражения (5), можно представить НМТ2 $\tilde{A}$ как

$$\tilde{A} = \int_x \frac{\left[\int_u \frac{f_x(u)}{u} \right]}{x} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x},\ u \in J_x \subseteq [0,1],\ x \in X. \qquad (9)$$

Приблизительно до середины 1990-х годов, как уже отмечалось при анализе литературы, основные направления в изучении НМТ2 были направлены на исследования теоретических операций с НМТ2, их алгебраических структур, свойств нечетких функций принадлежности, а также возможностей по использованию НМТ2 при нечетком логическом выводе. При этом, данные исследования по НМТ2 опирались на терминологию и формы представления, рассмотренные выше и не использовали так широко, как НМТ1, графическое представление соответствующих нечетких функций принадлежности в связи с их сложной для визуализации трехмерной природой (например, графическое представление НМТ2 на рис. 2 не использовалось на практике).

Начиная со второй половины 1990-х годов в работах Дж.М. Менделя, Р.И. Джона, Н.Н. Карника, таких как, например, [2, 6 – 10], были разработаны новые подходы в области НМТ2, в том числе предложен и развит новый расширенный набор терминов по НМТ2, обеспечивающий их точное математическое представление, использование других новых форм представления НМТ2 (в том числе и для визуализации) и новых принципов для исследования операций над НМТ2 как в теоретической, так и практической областях.

В рамках данной статьи рассмотрим новые набор терминов и формы представления НМТ2 в сравнении с описанными выше, так называемыми, классическими терминологией и формами представления НМТ2, а также терминологией и формами представления, которые соответствуют НМТ1. Это, с одной стороны, позволит показать эволюцию развития и преемственность идей в области НМТ2 от первых публикаций Л. Заде по НМТ2 до соответствующих публикаций последних лет, и, с другой стороны, обеспечит более глубокое понимание физической природы НМТ2.

Определение 4. Для каждого элемента $x \in X$, называемого **первичной переменной** (*primary variable*), графическое представление НМТ1 (в форме значений функции принадлежности этого множества, например, функции принадлежности f_{x_k} на рис. 2) на плоскости, чьими осями являются принадлежности u и $\mu_{\tilde{A}}$, называется **вертикальным срезом** (*vertical slice*) нечеткой функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}$. При этом непосредственно данное НМТ1 определяется как **вторичное множество** (*secondary set*), а так как в данном случае в качестве НМТ1 выступает нечеткая степень принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ (см. выражения (4), (5)), то в рамках новой терминологии ее тоже рассматривают как вертикальный срез и называют **вторичной функцией принадлежности** (*secondary membership function*).

Определение 5. Представление НМТ2 $\tilde{A}$ в виде вертикальных срезов или, что по сути является тем же самым, совокупности всех вторичных множеств или, что также является тем же самым, объединения всех вторичных функций принадлежности называется представлением НМТ2 **способом вертикального среза** (*vertical-slice manner*).

Таким образом, выражения (4), (5), (7), т.е. представления, которые рассматриваются как классические, основаны на представлении НМТ2 способом вертикального среза.

Вертикальный срез, вторичное множество и вторичная функция принадлежности определяют одно понятие для элемента области значений нечеткой функции принадлежности, но для разных его реализаций (видов использования), а именно:

вертикальный срез – подразумевает, прежде всего, графическое представления элемента области значений нечеткой функции принадлежности (см. рис. 2, 3, 4) и определяет способ представления НМТ2;

вторичное множество – позволяет однозначно выделять его среди других типов НМТ1, используемых при описании НМТ2;

вторичная функция принадлежности – с одной стороны представляет термин, эквивалентный термину «нечеткая степень принадлежности», с другой стороны явно, путем замены обозначений, фиксирует факт того, что НМТ1 в виде $\mu_{\tilde{A}}(x)$ определяется своей функцией принадлежности f_x (т.е. в новом расширенном наборе терминов по НМТ2 обозначение f_x не используется, а заменяется на эквивалентное ему по смыслу обозначение $\mu_{\tilde{A}}(x)$).

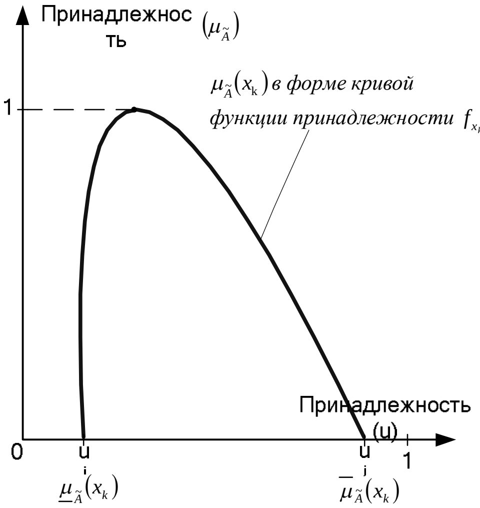

Рис. 3. Пример графического представления вертикального среза в $x_k \in X$

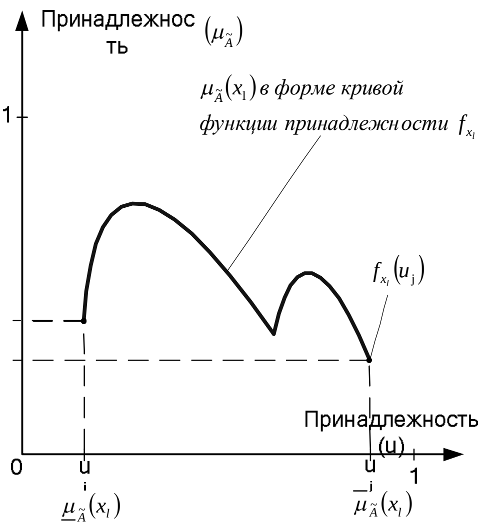

Рис. 4. Пример графического представления вертикального среза в $x_l \in X$

Так как $\mu_{\tilde{A}}(x)$ рассматриваем как функцию (подразумевая под ней, тем не менее, и НМТ1), то можно говорить и о ее областях определения и значений.

Определение 6. Элементами области значений вторичной функции принадлежности являются **вторичные степени** (*secondary grade*). Вторичная степень представляет собой амплитуду значений вторичной функции принадлежности $f_x(u)$ (см. рис. 4, выражение (3)).

Определение 7. Область определения (*domain*) вторичной функции принадлежности называется **первичной принадлежностью** (*primary membership*) и обозначается как J_x, где $J_x \subseteq [0,1], \forall x \in X$ (см. (3), (4), (5), (8), (9)). Элементами первичной принадлежности являются **вторичные переменные** (*secondary variable*), обозначаемые $u, u \in U$ или $u \in J_x \subseteq U = [0,1]$. Таким образом, согласно определений 6 и 7, вторичная степень представляет собой некоторую оценку вторичной переменной.

Вторичные переменные можно рассматривать как значения функций принадлежности так называемых вложенных НМТ1 (новый тип НМТ1, используемый при описании НМТ2 и отличный от вторичного множества). Прежде чем рассматривать вложенные НМТ1, рассмотрим вложенные НМТ2.

Определение 8. **Вложенным НМТ2** $\tilde{A}_e$ (*embedded type-2 fuzzy set*) с мощностью N для дискретных (конечных) множеств X и U называется множество кортежей из трех элементов, где первые элементы кортежа представляют собой соответствующие первичные переменные $x_i \in X$, вторые элементы представляют точно одно значение из $J_{x_1}, J_{x_2}, ..., J_{x_N}$ для каждой первичной переменной, а именно $u_1, u_2, ..., u_N$, третьи элементы представляют соответствующие вторичные степени $f_{x_1}(u_1), f_{x_2}(u_2), ..., f_{x_N}(u_N)$, т.е.

$$\tilde{A}_e = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[\frac{f_{x_i}(u_i)}{u_i} \right]}{x_i}, \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1], \; x_i \in X . \quad (10)$$

Определение 9. **Вложенным НМТ2** $\tilde{A}_e$ (*embedded type-2 fuzzy set*) для непрерывных (бесконечных) множеств X и U называется множество, у которого каждая первичная переменная $x \in X$ имеет только одну вторичную переменную $u \in U$ (т.е., одно значение первичной принадлежности) с соответствующей вторичной степенью, т.е.

$$\tilde{A}_e = \int_{x \in X} \frac{\left[\frac{f_x(u)}{u} \right]}{x}, \quad u \in J_x \subseteq U = [0,1]. \quad (11)$$

Пример графического представления вложенного НМТ2, чьи вторичные степени равны 1 (частный случай), представлен на рис. 5.

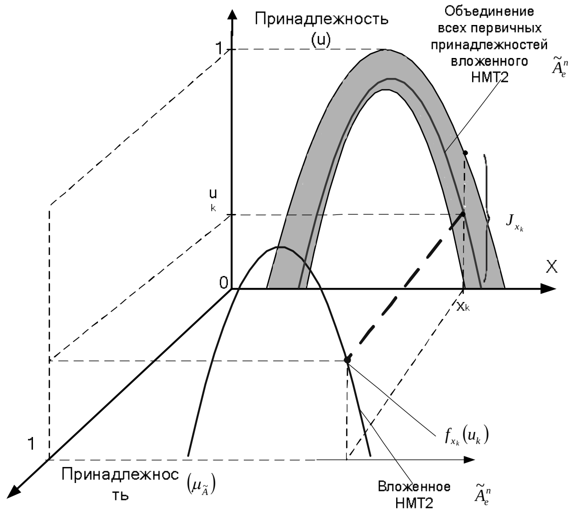

Рис. 5. Пример графического представления вложенного НМТ2

Определение 10. **Вложенным НМТ1** A_e (*embedded type-1 fuzzy set*) с мощностью N для дискретных (конечных) множеств X и U называется множество пар, где первые элементы пары представляют собой соответствующие первичные переменные $x_i \in X$, а вторые элементы точно одно значение из $J_{x_1}, J_{x_2}, ..., J_{x_N}$, а именно $u_1, u_2, ..., u_N$, т.е.

$$A_e = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i}{x_i}, \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1], \; x_i \in X. \quad (12)$$

Определение 11. **Вложенным НМТ1** A_e (*embedded type-1 fuzzy set*) для непрерывных (бесконечных) множеств X и U называется множество, представляющее собой объединение всех первичных принадлежностей вложенного НМТ2 $\tilde{A}_e$ в (11), т.е. (см. рис. 5, 6):

$$A_e = \int_{x \in X} \frac{u}{x}, \quad u \in J_x \subseteq U = [0,1]. \quad (13)$$

Таким образом, вложенное НМТ1 A_e представляет собой область определения для вложенного НМТ2 $\tilde{A}_e$.

Вложенные НМТ2 $\tilde{A}_e$ и НМТ1 A_e с непрерывными (бесконечными) множествами X и U используются только в теоретических целях, в связи с тем, что количество соответствующих вложенных множеств является неисчислимым.

Определение 12. Объединение всех первичных принадлежностей называется **занимаемой площадью неопределенности** (*footprint of uncertainty (* FOU *)*) (см. рис. 6) и представляется как

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{\forall x \in X} J_x = \{(x,u); u \in J_x \subseteq [0,1]\}. \quad (14)$$

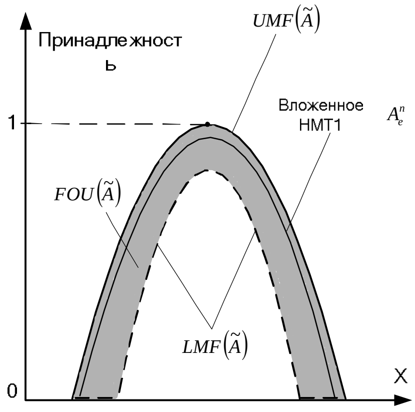

Рис. 6. Пример графического представления вложенных НМТ1 и занимаемой площади неопределенности $FOU(\tilde{A})$

В данном случае, при рассмотрении занимаемой площади неопределенности не рассматриваются ограничения, связанные с природой первичных и вторичных переменных (являются или не являются они естественно упорядоченными, а также являются они дискретными (конечными), непрерывными (бесконечными) или гибридными (т.е. когда значения первичной переменной являются дискретными, а вторичной переменной непрерывными или наоборот)). Для этих целей в литературе по НМТ2 вводится дополнительное понятие **занимаемой области неопределенности** (*domain of uncertainty (DOU)*), которое в рамках данной статьи не рассматривается, а FOU в свою очередь используется для всех случаев задания первичных и вторичных переменных.

Занимаемая площадь неопределенности фактически может рассматриваться как нечеткое множество, значениями функции принадлежности которой являются интервалы (см. рис. 1). В качестве интервалов в таком случае выступают первичные принадлежности. Данный подход к представлению занимаемой площади неопределенности в теории НМТ2 не рассматривается, однако представляет интерес с точки зрения отражения теоретических предпосылок к появлению и использованию самого понятия FOU, как развития классических форм представления НМТ2. В общем случае, ограничений на вид FOU не существует. При этом FOU может иметь ограничения сверху и снизу соответственно в виде верхней и нижней функций принадлежности.

Определение 13. **Верхняя функция принадлежности** (*upper membership function*), обозначаемая $UMF(\tilde{A})$ или $\overline{\mu}_{\tilde{A}}$, и **нижняя функция принадлежности** (*lower membership function*), обозначаемая $LMF(\tilde{A})$ или $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$ (рис. 6), определяют соответствующие НМТ1 и ограничивают FOU сверху и снизу соответственно, т.е.

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}} \equiv \overline{FOU\left(\tilde{A}\right)} \quad \forall x \in X,$$
$$\underline{\mu}_{\tilde{A}} \equiv \underline{FOU\left(\tilde{A}\right)} \quad \forall x \in X. \tag{15}$$

Если занимаемая площадь неопределенности может рассматриваться как нечеткое множество, значениями функции принадлежности которой являются интервалы, то первичную принадлежность с учетом определения 12 можно представить как

$$J_x = \left[\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x), \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)\right]. \tag{16}$$

При этом НМТ1, определенные как $UMF\left(\tilde{A}\right)$ и $LMF\left(\tilde{A}\right)$, являются вложенными НМТ1 (см. выражения (12), (13)).

Помимо рассмотренных двух типов НМТ1, а именно вторичного множества и вложенного НМТ1, для описания НМТ2 используемых еще один тип НМТ1, называемый первичной функцией принадлежности.

Определение 14. Под **первичной функцией принадлежности** (*primary membership function*) будем понимать определяемое ею НМТ1 по крайней мере с одним параметром, у которого есть диапазон значений на области определения.

Различие между вложенным НМТ1 A_e и первичной функцией принадлежности заключается в том, что первичная функция принадлежности не рассматривается обязательно как область определения некоторого вложенного НМТ2, в отличии от вложенного НМТ1 A_e. При этом вложенное НМТ1 A_e всегда может рассматриваться как первичная функция принадлежности.

Пока, в рамках данной статьи, был сделан акцент на представлении НМТ2 в виде вертикальных срезов (выражения (7), (8), (9)). Рассмотрим новый способ представления НМТ2, представленный в работе [2] и основанный на **теореме представления** (*Representation Theorem*). Доказательство теоремы представления приведено также в работе [2].

Определение 15. Согласно **теоремы представления** НМТ2 $\tilde{A}$ может быть представлено как объединение вложенных в него более простых НМТ2 $\tilde{A}_e^j$, т.е.

$$\tilde{A} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_e^j = \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_e^j. \tag{17}$$

В дальнейшем в качестве знака объединения множеств будем использовать только знак $\bigcup$, а знак $\sum$ будем использовать как знак объединения элементов этих множеств. Представление НМТ2 в виде выражения (17) называется представлением НМТ2 **способом волнистого среза** (*wavy slice manner*). При этом, в качестве непосредственно **волнистого среза** (*wavy slice*) в данном случае выступает вложенное НМТ2 (см. рис. 5), а само название «волнистый» характеризует трехмерную природу представления данного среза (в отличие, например от вертикального среза, который имеет двухмерную природу представления (см. рис. 3, 4 и определение 4)).

Теорема представления является основой получения выражений для операций над НМТ2 без использования принципа обобщения. Доказательство теоремы представляет особый интерес и будет детально рассмотрено в рамках следующей статьи, посвященной представлению и исследованию базовых операций над НМТ2.

По аналогии с выражением (17) занимаемую площадь неопределенности FOU можно представить через вложенные НМТ1 как

$$FOU\left(\tilde{A}\right) = \bigcup_{j=1}^{n} A_e^j. \tag{18}$$

Тогда, в связи с тем, что каждое вложенное НМТ1 A_e^j представляет собой область определения для соответствующего вложенного НМТ2 $\tilde{A}_e^j$, занимаемую площадь неопределенности $FOU\left(\tilde{A}\right)$ можно рассматривать, в целом, как двумерную область определения для НМТ2 $\tilde{A}$ (точнее для нечеткой функции принадлежности, которая определяет НМТ2 $\tilde{A}$). Исходя из данного предположения, нечеткую функцию принадлежности типа 2 $\mu_{\tilde{A}}$ (третья размерность, см. рис. 2) можно рассматривать также и как функцию от двух переменных, первичной переменой $x \in X$ и вторичной переменной $u \in J_x \subseteq U = [0,1]$ соответственно, при условии, что полностью задана некоторая $FOU\left(\tilde{A}\right)$, собственно и представляющая собой область определения для нечеткой функции принадлежности типа 2 $\mu_{\tilde{A}}$.

Согласно трехмерной природе нечеткой функции принадлежности НМТ2 (т.е. согласно соответствующего ее графического представления (см. рис. 2)) точка в пространстве задается тремя параметрами $(x, u, f_x(u))$ или, исходя из возможности рассмотрения $\mu_{\tilde{A}}$ как функции от двух переменных, параметрами $(x, u, \mu_{\tilde{A}}(x,u))$, т.е. [10]:

$$f_x(u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x,u). \tag{19}$$

Таким образом, исходя из рассмотренных предположений (выражения (18), (19)) представим новое определение НМТ2, которое было введено в [2].

Определение 16. НМТ2 $\tilde{A}$ описывается в соответствии с функцией принадлежности типа 2 $\mu_{\tilde{A}}$ как множество кортежей $((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u))$, где $x \in X$ и $u \in J_x \subseteq [0,1]$, т.е.

$$\tilde{A} = \left\{ \left((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u) \right) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1] \right\}. \quad (20)$$

НМТ2 $\tilde{A}$ может быть выражено также как [2]:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x,u)}{(x,u)}, \quad J_x \subseteq [0,1]. \quad (21)$$

Исходя из выражений (19) – (21), функцию принадлежности типа 2 $\mu_{\tilde{A}}$, являющуюся функцией от двух переменных, можно было бы представить в виде следующего отображения (сравните с выражением (1) классического формального представления функции принадлежности НМТ2):

$$\mu_{\tilde{A}} : X \times U_J \to [0,1], \quad U_J = \bigcap_{x \in X} J_x, J_x \subseteq U = [0,1]. \quad (22)$$

Однако, представление функции принадлежности типа 2 $\mu_{\tilde{A}}$ в виде выражения (22) не используется, так как фактически описывает формально только нечеткое отношение, определенное на декартовом произведении $X \times U_J$. Т.е., выражение (22) приписывает каждой паре (x,u) ее степень принадлежности, которая интерпретируется как сила связи между элементами $x \in X$ и $u \in U_J$, и не показывает зависимости между элементами $x \in X$ и $u \in U_J$, когда $u \in U_J$ рассматривается как степень принадлежности $x \in X$ к некоторому вложенному (т.е., не задана $FOU(\tilde{A})$). Другими словами, выражение (22) полностью описывает НМТ1, определенное на декартовом произведении $X \times U_J$, которое также называется **нечетким отношением типа 1**. Соответственно, существуют нечеткие отношения более высокого порядка, например **нечеткие отношения типа 2**, которые не рассматриваются в рамках данной статьи. При этом, различия в формальном представлении НМТ2 $\tilde{A}$, у которого $\mu_{\tilde{A}}$ рассматривается как функция от двух переменных, и некоторого нечеткого отношения R, как НМТ1, определенного на декартовом произведении $X \times U_J$, видно, например, из выражений (21) и (23):

$$R = \int_{X \times U_J} \frac{\mu_R(x,u)}{(x,u)}, \quad x \in X, u \in U_J. \quad (23)$$

При этом важно понимать, что пара (x,u) в выражениях (20) и (21) представляет собой элемент вложенного НМТ1, а в выражении (23) элемент четкого множества $X \times U_J$, являющегося областью определения нечеткого отношения.

Сводный перечень новых терминов и обозначений по НМТ2 приведен в табл. 1.

В заключение отметим, что НМТ1 может быть представлено как НМТ2, при этом каждая вторичная функция принадлежности имеет только одно значение в ее области определения, а именно первичную принадлежность (представленного в виде одного элемента, а не интервала), в которой вторичная степень равна 1 (рис. 7, 8).

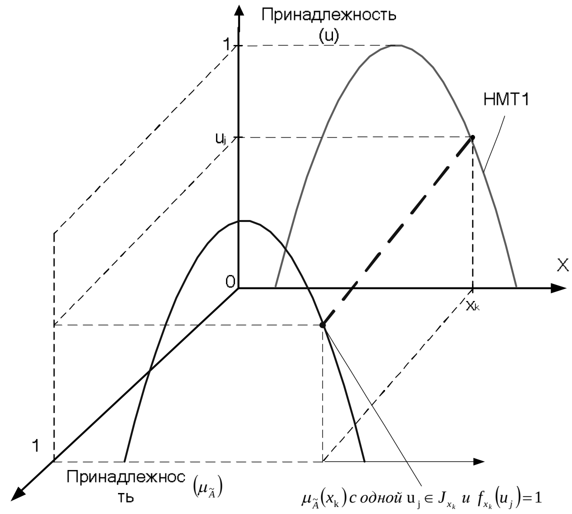

Рис. 7. Пример графического представления НМТ1 как НМТ2 в трехмерном пространстве

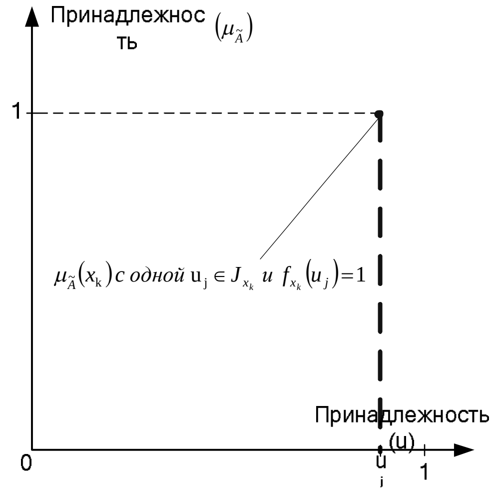

Рис. 8. Пример графического представления вертикального среза, представляющего точку, в $x_k \in X$ для НМТ1, представленного в виде НМТ2

Пример. Приведем пример практического построения НМТ2 с использованием рассмотренных в статье новых терминологии и форм представления НМТ2. В качестве основы для примера предлагается использовать модель оценивания финансовой состоятельности клиентов при предоставлении банковских кредитов [13]. Предположим, необходимо построить НМТ2, которое содержательно описывало бы оценку дохода потенциального клиента. В работе [14] формализация субъективной оценки дохода потенциального клиента выполнена с помощью лингвистической переменной «Доход». В качестве терм-множества данной лингвистической переменной используется множество

$$T = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = \text{"низкий"}, \alpha_2 = \text{"высокий"}, \\ \alpha_3 = \text{"очень высокий"} \end{array} \right\}$$

Таблица 1

Сводный перечень новых терминов и обозначений по НМТ2

Термин	Обозначение	Комментарий
Вторичная переменная	$u \in J_x \subseteq U = [0,1]$	См. определение 7
Первичная переменная	$x \in X$	См. определение 4
Вторичная функция принадлежности (вертикальный срез, вторичное множество)	$\mu_{\tilde{A}}(x)$	См. определение 4
Первичная функция принадлежности	нет	См. определение 14
Вторичная степень	$f_x(u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x,u)$	См. определение 6
Первичная степень (первичная степень принадлежности, primary membership grade)	нет	Термин не используется, так как полностью определяется термином «вторичная переменная»
Вторичная принадлежность (secondary membership)	нет	Принадлежности первичных принадлежностей в $\mu_{\tilde{A}}(x)$, т.е. множество вторичных степеней $\{f_x(u)\}$, где $u \in J_x$
Первичная принадлежность	$J_x \subseteq [0,1]$	См. определение 7
Вложенное НМТ2	$\tilde{A}_e$	См. определения 8, 9
Вложенное НМТ1	A_e	См. определения 10, 11
Занимаемая площадь неопределенности	$FOU(\tilde{A})$	См. определение 12
Верхняя функция принадлежности	$UMF(\tilde{A})$ или $\overline{\mu}_{\tilde{A}}$	См. определение 13
Нижняя функция принадлежности	$LMF(\tilde{A})$ или $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$	См. определение 13
Представление НМТ2 способом вертикального среза	нет	См. определение 5
Представление НМТ2 способом волнистого среза	нет	См. определение 15
Функция принадлежности типа 2	$\mu_{\tilde{A}}$	Функция от двух переменных $x \in X$ и $u \in J_x$. См. определение 16
Нечеткое множество типа 2	$\tilde{A}$	См. определение 16
Главная функция принадлежности (*principal membership function*)	нет	Множество первичных принадлежностей (по одному $u \in J_x$ для каждого $x \in X$), имеющих вторичные принадлежности равные 1 (частный случай вложенного НМТ1)
Интервальное нечеткое множество типа 2, ИНМТ2 (*interval type-2 fuzzy set*)	$\tilde{A}$	НМТ2, чьи все вторичные степени равны 1. При этом, ИНМТ2 полностью определяется ее $FOU(\tilde{A})$. $FOU(\tilde{A})$, в данном случае, представляет собой нечеткое множество, значениями функции принадлежности которого являются интервалы. Детально ИНМТ2 будет рассмотрено в статье, представляющей данный тип множеств

Нечеткие множества, описывающие возможные значения, которые могут принимать нечеткие переменные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, представляют собой НМТ1, которые соответственно обозначим как A_1, A_2, A_3. Вид функций принадлежности $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}$, определяющих соответствующие НМТ1 A_1, A_2, A_3, показан на рис. 9.

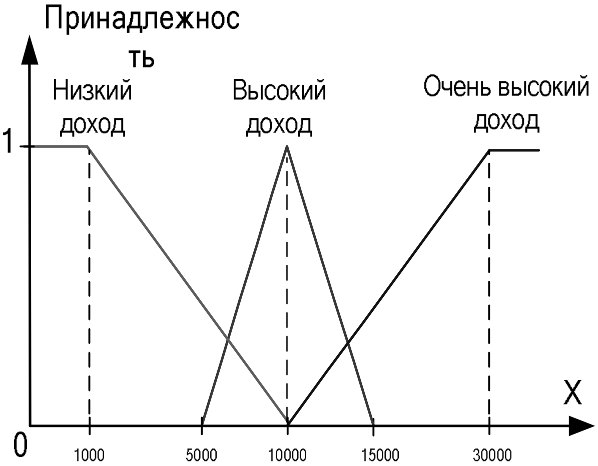

Рис. 9. Пример графического представления функций принадлежности для термов лингвистической переменной «Доход» в виде НМТ1

Для наглядности, в качестве области определения (универсума) функций принадлежности $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}$ будем рассматривать диапазон денежной суммы в пределах интервала от 0 до 30000 гривен, в отличие от оригинального примера в работе [14], где оценка дохода сводится к диапазону баллов в пределах интервала от 0 до 10.

С целью представления примера практического использования новых терминов по НМТ2, рассмотренных в статье, построим НМТ2 «Высокий доход», которое обозначим $\tilde{A}_2$ (имеется ввиду, что строится новое НМТ2, а не представляется НМТ1 в виде НМТ2). Результат построения представлен в виде графического представления НМТ2 «Высокий доход» на рис. 10.

Графически НМТ2 (на рис. 10 не показано) представляет собой поверхность, полученную в результате объединения вложенных НМТ2 согласно выражению (17).

Графически НМТ2 можно также представить в двухмерной области вместо трехмерной с использованием его FOU. При этом плоскость FOU заштриховывается разными оттенками, тем самым показывая, что есть распределение вершин поверхности НМТ2. Это распределение зависит от значений вторичных степеней (рис. 11). Равномерная заштриховка в случае представления НМТ2 в двухмерной области означает, что значением всех вторичных степеней является 1.

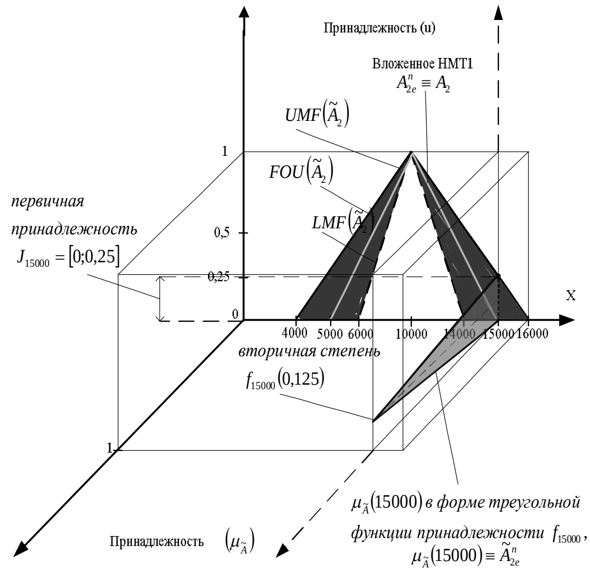

Рис. 10. Пример графического представления НМТ2 «Высокий доход» в трехмерной области

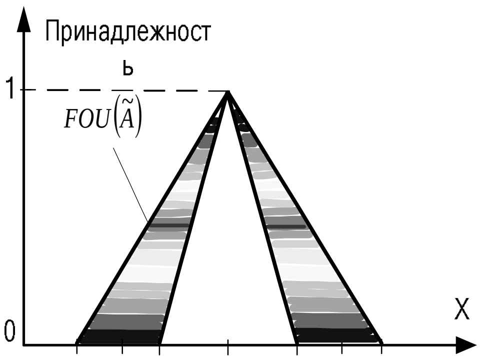

Рис. 11. Пример графического представления НМТ2 «Высокий доход» в двухмерной области

Для более точного понимания различий в визуализации НМТ2 и нечетких отношений приведем на рис.12 пример графического представления поверхности в трехмерной области для произвольного нечеткого отношения типа 1 (см. выражение (23)), не связанный с примером на рис 10 и 11.

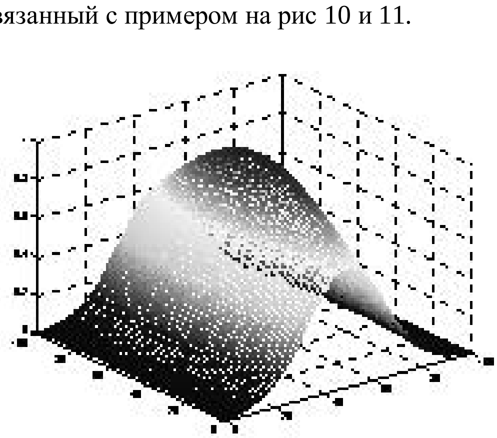

Рис. 12. Пример графического представления нечеткого отношения типа в виде поверхности в трехмерной области (FOU не задается)

В заключении необходимо отметить, что рассмотрение вопросов оценки эффективности и адекватности формализации заданных объектов предметной области с использованием НМТ2, в том числе в сравнении с НМТ1, выходит за рамки предмета исследования данной статьи.

Данные вопросы, а также вопросы, связанные с детальным изучением процесса непосредственного построения НМТ2 будут рассмотрены в последующих публикациях, посвященных разработке нечетких логических систем (*Fuzzy Logic Systems*) на основе НМТ2.

Выводы

Предложенный подход к рассмотрению новой терминологии и форм представления НМТ2 обеспечивает полное и точное описание основных математических элементов НМТ2, в том числе с позиций точного и однозначно понимаемого перевода новых терминов, позволяет проследить процесс эволюционного развития идей в области НМТ2 от первых публикаций до публикаций последних лет в части формирования нового расширенного набора терминов по НМТ2.

Рассмотренные терминология и представления НМТ2 являются основой для их понимания и последующего представления, изучения и исследования базовых операций над этими множествами, других обобщений нечетких множеств (в том числе интервальных нечетких множеств типа 2).

Список литературы

1. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning / L.A. Zadeh // Inform. Sci. – 1975. – Vol. 8. – P. 199-249.

2. Mendel J.M. Type-2 Fuzzy Sets Made Simple / J.M. Mendel, R.I. John // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – April 2002. – Vol. 10, no. 2. – P. 117-127.

3. Mizumoto M. Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2 / M. Mizumoto, K. Tanaka // Reprinted from Information and Control. – August 1976. – Vol. 31, no. 4. – P. 312-340.

4. Mizumoto M. Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum / M. Mizumoto, K. Tanaka // Fuzzy Sets Syst. – 1981. – Vol. 5. – P. 277-290.

5. Nieminen J. On the algebraic structure of fuzzy sets of type-2 / J. Nieminen // Kybernetica. – 1977. – 13 (4) – P. 86-92.

6. Karnik N.N. Introduction to type-2 fuzzy logic systems / N.N. Karnik, J.M. Mendel // Proc. 1998 IEEE FUZZ Conf. – May 1998. – P. 915-920.

7. Karnik N.N. Type-2 fuzzy logic systems / N.N. Karnik, J.M. Mendel, Q. Liang // IEEE Trans. Fuzzy Syst. – Dec. 1999. – Vol. 7. – P. 643-658.

8. Karnik N.N. Operations on type-2 fuzzy sets / N.N. Karnik, J.M. Mendel // Int. J. Fuzzy Sets Syst. – 2001. – Vol. 122. – P. 327-348.

9. Karnik N.N. Centroid of a type-2 fuzzy set / N.N. Karnik, J.M. Mendel // Inform. Sci. – 2001. – Vol. 132. – P. 195-220.

10. Mendel J.M. Type-2 fuzzy sets and systems: an overview / J.M. Mendel // IEEE Computational Intelligence Magazine. – February 2007. – Vol. 2. – P. 20-29.

11. Прикладные нечеткие системы: пер. с япон. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др., под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М.: Мир, 1993. – 368 с., ил.

12. Zadeh L.A. Fuzzy sets / L.A. Zadeh // Inf. Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338-353.

13. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А.В. Леоненков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с., ил.

14. Рутковский Л. Методы и технологии искусственного интеллекта: пер. с польск. И.Д. Рудинского / Л. Рутковский. – М.: Горячая линия-Телеком, 2010. – 520 с., ил.

15. Карпенко А.С. Минимальные модели для нечеткой алгебры типа 2 / А.С. Карпенко, В.И. Шалак / Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1996. – М., 1997. – 205 с.

16. Кукса П.П. Нечеткие лингвистические модели второго рода [Электронный ресурс] / П.П. Кукса // МГТУ им. Н.Э. Баумана. – Режим доступа к ресурсу: http://paul.rutgers.edu/~pkuksa/publications/t2fs-c-0-sept-03.pdf.

Поступила в редколлегию 2.11.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.А. Демидов, Харьковский университет Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба, Харьков.

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ ТИПУ 2. ТЕРМІНОЛОГІЯ ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ

С.А. Олізаренко, Є.В. Брежнєв, О.В. Перепелиця

В роботі дано аналіз існуючих підходів до визначення та представлення нечітких множин типу 2 з метою формування єдиного понятійного апарату (термінології) і форм представлення цих множин. Розглянуті термінологія та представлення нечітких множин типу 2 є основою більш глибокого їх розуміння та наступного представлення, вивчення та дослідження базових операцій над цими множинами.

***Ключові слова**: нечітка множина типу 2, нечітка функція приналежності, займана площа невизначеності.*

THE TYPE 2 FUZZY SETS. TERMINOLOGY AND REPRESENTATIONS

S.A. Olizarenko, E.V. Brezhnev, A.V. Perepelitca

This paper represents the analysis of known approaches for determining and representing of type-2 fuzzy sets to establish the solid conceptual framework and their types of representation. The terminology and representations of the type-2 fuzzy sets considered are the basis for deep insight into their nature and the following representations, consideration and investigation of the fundamental operations on the 2-type fuzzy sets.

***Keywords**: the type-2 fuzzy set, fuzzy membership function, footprint of uncertainty.*