УДК 519.832.4

В.В. Романюк

Хмельницький національний університет, Хмельницький

ТЕОРЕМА ПРО СІМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ СТРОГО ОПУКЛО-ВГНУТОЇ АНТАГОНІСТИЧНОЇ ГРИ З ЯДРОМ НА ОДИНИЧНОМУ КВАДРАТІ

Доведено теорему про сім видів розв'язку однієї строго опукло-вгнутої антагоністичної гри з ядром на одиничному квадраті. Кожен розв'язок, будучи представленим виключно у чистих стратегіях гравців, визначається певною сукупністю співвідношень між п'ятьма параметрами ядра.

Ключові слова: *опукло-вгнута антагоністична гра, розв'язок гри, одиничний квадрат, чиста стратегія, параметри ядра гри.*

Виділення завдання дослідження

Строго опукло-вгнута антагоністична гра (СОВАГ) може бути спрощеною математичною моделлю деяких конкурентних (конфліктних) соціально-економічних процесів та явищ [1, 2]. Взагалі кажучи, найбільш простою формою ядра СОВАГ є задана на одиничному квадраті

$$U_S = X \times Y = [0;\,1] \times [0;\,1] \tag{1}$$

поверхня

$$S(x,\,y) = Ax^2 + Bx + Cxy + Dy + Hy^2 + \lambda \tag{2}$$

з ненульовими параметрами A, B, C, D, H і довільною сталою λ. Розв'язок СОВАГ з ядром (2) представляється у формі [3, с. 86; 4, 5]:

$$\mathscr{X} = \left\{ x_{opt},\, y_{opt},\, V_{opt} \right\}, \tag{3}$$

де $x_{opt} \in X$ є єдиною оптимальною стратегією першого гравця, а $y_{opt} \in Y$ є єдиною оптимальною стратегією другого гравця, причому оптимальне значення гри $V_{opt} = S\left(x_{opt},\, y_{opt}\right)$.

Зауважимо, що оскільки для СОВАГ мають виконуватися умови $\dfrac{\partial^2 S(x,\,y)}{\partial x^2} < 0$ і $\dfrac{\partial^2 S(x,\,y)}{\partial y^2} > 0$ $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$, то легко отримуються обмеження $A < 0$ й $H > 0$ для множників, які стоять перед квадратами стратегій гравців. Доведемо, що при односторонньому обмеженні $B < 0$ дана СОВАГ має сім видів розв'язку у чистих стратегіях гравців, причому будь-який розв'язок цієї гри однозначно визначається певною сукупністю співвідношень між параметрами ядра.

Теорема про сім видів розв'язку однієї СОВАГ

СОВАГ з ядром (2), яке визначене на одиничному квадраті (1) з ненульовими параметрами A, B, C, D, H, при $B < 0$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ має сім видів розв'язку, кожен з яких визначається певною сукупністю співвідношень між параметрами ядра та представляється виключно у чистих стратегіях гравців. Існує розв'язок, який визначається певною сукупністю співвідношень між параметрами ядра, де гравці мають оптимальні стратегії одночасно на лівих кінцях сегментів $X = [0;\,1]$ та $Y = [0;\,1]$. Крім того, існує розв'язок, який визначається певною сукупністю співвідношень між параметрами ядра, де гравці мають одночасно оптимальні стратегії на правих кінцях сегментів $X = [0;\,1]$ та $Y = [0;\,1]$. Також існує параметричний розв'язок, де перший гравець має оптимальну стратегію на лівому кінці сегмента $X = [0;\,1]$, а другий гравець має оптимальну стратегію на правому кінці сегмента $Y = [0;\,1]$.

Доведення. Оскільки $A < 0$, то парабола (2) як функція від змінної x має точку глобального максимуму x_{max}, котра є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x,\,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ax^2 + Bx + Cxy + Dy + Hy^2 + \lambda \right) = = 2Ax + B + Cy = 0. \tag{4}$$

Звідси точка глобального максимуму

$$x_{max} = -\frac{B + Cy}{2A}. \tag{5}$$

Далі все залежить від того, чи точка (5) потрапляє в одиничний сегмент $X = [0;\,1]$. Якщо прийняти обмеження $C > 0$, то $x_{max} \geqslant 0$ при $B + Cy \geqslant 0$, що може бути записано як $y \geqslant -\dfrac{B}{C} > 0$. З іншого боку, $x_{max} \leqslant 1$ при $B + Cy \leqslant -2A$, що записується як $y \leqslant -\dfrac{2A + B}{C}$. Тоді при $2A + B + C \geqslant 0$ отримаємо $-\dfrac{2A + B}{C} \in (0;\,1]$ та, оскільки $0 < -\dfrac{B}{C} < -\dfrac{2A + B}{C}$, значення $-\frac{B}{C} \in (0;\, 1)$. Зрештою, точка $x_{max} \in [0;\, 1]$ при $y \in \left[-\frac{B}{C};\, -\frac{2A+B}{C}\right]$ і

$$S(x_{max},\, y) = S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\, y\right) = A\frac{(B+Cy)^2}{4A^2} -$$

$$-B\frac{B+Cy}{2A} - Cy\frac{B+Cy}{2A} + Dy + Hy^2 + \lambda = -\frac{(B+Cy)^2}{4A} +$$

$$+Dy + Hy^2 + \lambda = -\frac{B^2}{4A} - \frac{BC}{2A}y + Dy - \frac{C^2}{4A}y^2 + Hy^2 +$$

$$+\lambda = y^2\frac{4AH - C^2}{4A} + y\frac{2AD - BC}{2A} - \frac{B^2}{4A} + \lambda. \quad (6)$$

При $y \notin \left[-\frac{B}{C};\, -\frac{2A+B}{C}\right]$ максимум поверхні (2) по x досягатиметься на одному з кінців сегмента $[0;\, 1]$ і буде залежати від знаку виразу $A+B+Cy$. Так як $A+B+Cy>0$ при $y > -\frac{A+B}{C}$, то, враховуючи співвідношення

$$-\frac{B}{C} < -\frac{A+B}{C} < -\frac{2A+B}{C},$$

максимум

$$\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\, y) = \begin{cases} \max\{S(0,\, y),\, S(1,\, y)\} = S(0,\, y) = Dy + Hy^2 + \lambda,\; y \in \left[0;\, -\frac{B}{C}\right]; \\ S(x_{max},\, y) = S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\, y\right) = y^2\frac{4AH-C^2}{4A} + y\frac{2AD-BC}{2A} - \frac{B^2}{4A} + \lambda,\; y \in \left[-\frac{B}{C};\, -\frac{2A+B}{C}\right]; \\ \max\{S(0,\, y),\, S(1,\, y)\} = S(1,\, y) = A + B + Cy + Dy + Hy^2 + \lambda,\; y \in \left[-\frac{2A+B}{C};\, 1\right]. \end{cases} \quad (7)$$

Для мінімізації функції (7) на сегменті $Y = [0;\, 1]$ необхідно знати глобальні мінімуми парабол $S(0,\, y)$, $S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\, y\right)$ й $S(1,\, y)$. Глобальний мінімум $y_{min}^{\langle 0\rangle}$ параболи $S(0,\, y)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dy}S(0,\, y) = \frac{d}{dy}\left(Dy + Hy^2 + \lambda\right) = D + 2Hy = 0, \quad (8)$$

з якого

$$y_{min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{D}{2H}. \quad (9)$$

Глобальний мінімум y_{min} параболи $S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\, y\right)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dy}S(x_{max},\, y) =$$

$$= \frac{d}{dy}\left(y^2\frac{4AH-C^2}{4A} + y\frac{2AD-BC}{2A} - \frac{B^2}{4A} + \lambda\right) =$$

$$= y\frac{4AH-C^2}{2A} + \frac{2AD-BC}{2A} = 0, \quad (10)$$

з якого

$$y_{min} = \frac{BC - 2AD}{4AH - C^2}. \quad (11)$$

І глобальний мінімум $y_{min}^{\langle 1\rangle}$ параболи $S(1,\, y)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dy}S(1,\, y) = \frac{d}{dy}\left(A + B + Cy + Dy + Hy^2 + \lambda\right) =$$

$$= C + D + 2Hy = 0, \quad (12)$$

звідки точка

$$y_{min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{C+D}{2H}. \quad (13)$$

При $D>0$ і $C>0$ точки (9) і (13) будуть лежати поза сегментом $[0;\, 1]$. Різниця

$$y_{min} - \left(-\frac{B}{C}\right) = \frac{BC-2AD}{4AH-C^2} + \frac{B}{C} =$$

$$= \frac{BC^2 - 2ADC + 4AHB - BC^2}{C\left(4AH - C^2\right)} =$$

$$= \frac{2A}{C\left(4AH-C^2\right)}\left(2HB - DC\right) \quad (14)$$

при $C>0$ і $D>0$ буде від'ємною, тобто тоді $y_{min} < -\frac{B}{C}$.

Обмеження 1. $C>0$, $D>0$, $2A+B+C \geqslant 0$.

Маємо максимум (7). Так як $y_{min}^{\langle 0\rangle} < 0$, то має місце параболічна нерівність

$$S\left(0,\, y_{min}^{\langle 0\rangle}\right) < S(0,\, 0) < S\left(0,\, -\frac{B}{C}\right). \quad (15)$$

Для точки $y_{min} < -\frac{B}{C}$ справедливим є співвідношення

$$S(x_{max},\, y_{min}) < S\left(x_{max},\, -\frac{B}{C}\right) <$$

$$< S\left(x_{max},\, -\frac{2A+B}{C}\right), \quad (16)$$

а для точки $y_{min}^{\langle 1\rangle} < 0$ виконано

$$S\left(1,\, y_{min}^{\langle 1\rangle}\right) < S\left(1,\, -\frac{2A+B}{C}\right) < S(1,\, 1). \quad (17)$$

Тоді з урахуванням тотожностей

$$S\left(x_{max}, -\frac{2A+B}{C}\right) = S\left(-\frac{B+Cy}{2A}, -\frac{2A+B}{C}\right) = $$
$$= S\left(1, -\frac{2A+B}{C}\right) \quad (18)$$

та

$$S\left(x_{max}, -\frac{B}{C}\right) = S\left(-\frac{B+Cy}{2A}, -\frac{B}{C}\right) = S\left(0, -\frac{B}{C}\right) \quad (19)$$

виходить, що мінімум функції (7) на сегменті Y як значення

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]} S(0,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,-\frac{2A+B}{C}\right]} S(x_{max},\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2A+B}{C};\,1\right]} S(1,\,y)\right\} =$$
$$= \min\left\{\min\left\{S(0,\,0),\, S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right),\, S\left(x_{max},\,-\frac{2A+B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(1,\,-\frac{2A+B}{C}\right),\, S(1,\,1)\right\}\right\} =$$
$$= \min\left\{S(0,\,0),\, S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right),\, S\left(1,\,-\frac{2A+B}{C}\right)\right\} = S(0,\,0) = \lambda = V_{opt} \quad (20)$$

досягається на стратегії $y_{opt} = 0$. Оптимальна стратегія x_{opt} має бути визначена з рівняння [4, 6, 7]:

$$V_{opt} = S(x,\,y_{opt}). \quad (21)$$

Коренями відповідного рівняння

$$V_{opt} = S(0,\,0) = \lambda = Ax^2 + Bx + \lambda =$$
$$= Ax\left(x + \frac{B}{A}\right) + \lambda = S(x,\,0) = S(x,\,y_{opt}) \quad (22)$$

є $x_1 = 0$ та $x_2 = -\frac{B}{A}$. Але $x_2 < 0$, звідки $x_{opt} = 0$ і за вказаного обмеження розв'язок гри

$$\mathscr{X} = \{0,\,0,\,\lambda\}. \quad (23)$$

Якщо $2A+B+C<0$, то $-\frac{2A+B}{C} > 1$, і максимум поверхні (2) по x залежатиме від знаку суми $B+C$. Тоді слід розглянути наступні два обмеження.

Обмеження 2. $C>0$, $D>0$, $2A+B+C<0$, $B+C \geqslant 0$.

Оскільки $-\frac{2A+B}{C} > 1$ та $-\frac{B}{C} \in (0;\,1]$, то максимум

$$\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) = \begin{cases} \max\{S(0,\,y),\, S(1,\,y)\} = S(0,\,y) = Dy + Hy^2 + \lambda,\ y \in \left[0;\,-\frac{B}{C}\right]; \\ S(x_{max},\,y) = S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\,y\right) = y^2\frac{4AH-C^2}{4A} + y\frac{2AD-BC}{2A} - \frac{B^2}{4A} + \lambda,\ y\in\left[-\frac{B}{C};\,1\right]. \end{cases} \quad (24)$$

Для такого випадку залишається нерівність (15), а замість нерівності (16) виконується подвійна нестрога нерівність

$$S(x_{max},\,y_{min}) < S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right) < S(x_{max},\,1). \quad (25)$$

Тоді мінімум функції (24) на сегменті Y

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]} S(0,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,1\right]} S(x_{max},\,y)\right\} =$$
$$= \min\left\{\min\left\{S(0,\,0),\, S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right),\, S(x_{max},\,1)\right\}\right\} =$$
$$= \min\left\{S(0,\,0),\, S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right)\right\} = S(0,\,0) = \lambda = V_{opt} \quad (26)$$

знову досягається на стратегії $y_{opt} = 0$, звідки з відповідного рівняння (22) випливає $x_{opt} = 0$ і розв'язок (23).

Обмеження 3. $C>0$, $D>0$, $2A+B+C<0$, $B+C<0$.

Цілком очевидно, що оскільки $-\frac{B}{C} > 1$, то

$$\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) = \max\{S(0,\,y),\, S(1,\,y)\} =$$
$$= S(0,\,y) = Dy + Hy^2 + \lambda. \quad (27)$$

Завдяки параболічній нерівності

$$S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right) < S(0,\,0) < S(0,\,1) \quad (28)$$

мінімум

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) = \min_{y\in[0;\,1]} S(0,\,y) =$$
$$= S(0,\,0) = \lambda = V_{opt} \quad (29)$$

досягається на стратегії $y_{opt} = 0$.

Звідки розв'язком є (23).

Якщо тепер покладати $D<0$, то при $2A+B+C\geqslant 0$ максимумом поверхні (2) по x на сегменті $[0;1]$ залишається функція (7).

Згідно з (9) точка $y_{\min}^{\langle 0\rangle}>0$, а з різниці

$$y_{\min}^{\langle 0\rangle}-\left(-\frac{B}{C}\right)=-\frac{D}{2H}+\frac{B}{C}=\frac{2HB-DC}{2HC} \quad (30)$$

випливає, що $y_{\min}^{\langle 0\rangle}\in\left(0;-\frac{B}{C}\right]$ при $2HB-DC\leqslant 0$.

Обмеження 4. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C\geqslant 0$, $2HB-DC\leqslant 0$.

Умова $y_{\min}^{\langle 0\rangle}\in\left(0;-\frac{B}{C}\right]$ дає систему двох параболічних нерівностей

$$\left\{S(0,0)>S\left(0,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right),\ S\left(0,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)\leqslant S\left(0,-\frac{B}{C}\right)\right\}, \quad (31)$$

а з (14) маємо $y_{\min}\leqslant-\frac{B}{C}$, звідки

$$S(x_{\max},y_{\min})\leqslant S\left(x_{\max},-\frac{B}{C}\right)<$$
$$<S\left(x_{\max},-\frac{2A+B}{C}\right). \quad (32)$$

Різниця

$$y_{\min}^{\langle 1\rangle}-y_{\min}^{\langle 0\rangle}=-\frac{C+D}{2H}-\left(-\frac{D}{2H}\right)=-\frac{C}{2H} \quad (33)$$

у даному обмеженні є від'ємною, тому $y_{\min}^{\langle 1\rangle}<y_{\min}^{\langle 0\rangle}$ та виконано співвідношення (17). Тоді мінімум функції (7) на сегменті Y

$$\min_{y\in[0;1]}\max_{x\in[0;1]}S(x,y)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;-\frac{B}{C}\right]}S(0,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};-\frac{2A+B}{C}\right]}S(x_{\max},y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2A+B}{C};1\right]}S(1,y)\right\}=$$
$$=\min\left\{S\left(0,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right),\ \min\left\{S\left(x_{\max},-\frac{B}{C}\right),S\left(x_{\max},-\frac{2A+B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(1,-\frac{2A+B}{C}\right),S(1,1)\right\}\right\}=$$
$$=\min\left\{S\left(0,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right),S\left(x_{\max},-\frac{B}{C}\right),S\left(1,-\frac{2A+B}{C}\right)\right\}=S\left(0,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)=S\left(0,-\frac{D}{2H}\right)=\lambda-\frac{D^2}{4H}=V_{opt} \quad (34)$$

досягається на стратегії $y_{opt}=y_{\min}^{\langle 0\rangle}=-\frac{D}{2H}$. Коренями відповідного рівняння (21)

$$V_{opt}=S\left(0,-\frac{D}{2H}\right)=\lambda-\frac{D^2}{4H}=Ax^2+Bx+Cx\left(-\frac{D}{2H}\right)+$$
$$+D\left(-\frac{D}{2H}\right)+H\left(-\frac{D}{2H}\right)^2+\lambda=Ax^2+Bx+Cx\left(-\frac{D}{2H}\right)+$$
$$+\lambda-\frac{D^2}{4H}=x\left(Ax+\frac{2HB-DC}{2H}\right)+\lambda-\frac{D^2}{4H}=\lambda-\frac{D^2}{4H}+$$
$$+Ax\left(x+\frac{2HB-DC}{2AH}\right)=S\left(x,-\frac{D}{2H}\right)=S(x,y_{opt}) \quad (35)$$

є $x_1=0$ та $x_2=\frac{DC-2HB}{2AH}$. Але $x_2\leqslant 0$, звідки $x_{opt}=0$ і за вказаного обмеження розв'язок гри

$$\mathscr{X}=\left\{0,-\frac{D}{2H},\lambda-\frac{D^2}{4H}\right\}. \quad (36)$$

При $2HB-DC>0$ точки $y_{\min}^{\langle 0\rangle}>-\frac{B}{C}$ та $y_{\min}>-\frac{B}{C}$. Різниця

$$y_{\min}-\left(-\frac{2A+B}{C}\right)=\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}+\frac{2A+B}{C}=$$
$$=\frac{BC^2-2ADC+8A^2H+4AHB-2AC^2-BC^2}{C\left(4AH-C^2\right)}=$$
$$=\frac{2A}{C\left(4AH-C^2\right)}\left[2H(2A+B)-C(C+D)\right] \quad (37)$$

є від'ємною у випадку $2H(2A+B)-C(C+D)<0$.

Обмеження 5. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C\geqslant 0$, $2HB-DC>0$, $2H(2A+B)-C(C+D)<0$.

Для точки $y_{\min}^{\langle 0\rangle}>-\frac{B}{C}$ виконано нерівність

$$S(0,0)>S\left(0,-\frac{B}{C}\right)>S\left(0,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right), \quad (38)$$

а для точки $y_{\min}\in\left(-\frac{B}{C};-\frac{2A+B}{C}\right)$ виконано

$$\left\{S\left(x_{\max},-\frac{B}{C}\right)>S(x_{\max},y_{\min}),\right.$$
$$\left.S(x_{\max},y_{\min})<S\left(x_{\max},-\frac{2A+B}{C}\right)\right\}. \quad (39)$$

У даному обмеженні різниця

$$y_{\min}^{\langle 1\rangle}-\left(-\frac{2A+B}{C}\right)=-\frac{C+D}{2H}+\frac{2A+B}{C}=$$
$$=\frac{2H(2A+B)-C(C+D)}{2HC} \quad (40)$$

виявляється від'ємною, тому $y_{\min}^{\langle 1\rangle}<-\frac{2A+B}{C}$ і виконано (17).

Тоді мінімум функції (7) на сегменті Y

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]} S(0,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,-\frac{2A+B}{C}\right]} S(x_{max},\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2A+B}{C};\,1\right]} S(1,\,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{\min\left\{S(0,\,0),\,S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\},\,S(x_{max},\,y_{min}),\,\min\left\{S\left(1,\,-\frac{2A+B}{C}\right),\,S(1,\,1)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right),\,S(x_{max},\,y_{min}),\,S\left(1,\,-\frac{2A+B}{C}\right)\right\}=S(x_{max},\,y_{min})=S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\,\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)^2\frac{4AH-C^2}{4A}+\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\cdot\frac{2AD-BC}{2A}-\frac{B^2}{4A}+\lambda=\frac{(BC-2AD)^2}{4A\left(4AH-C^2\right)}-\frac{(BC-2AD)^2}{2A\left(4AH-C^2\right)}-\frac{B^2}{4A}+\lambda=$$

$$=\frac{(BC-2AD)^2}{4A\left(C^2-4AH\right)}-\frac{B^2}{4A}+\lambda=\frac{B^2C^2-4ADBC+4A^2D^2-B^2C^2+4AB^2H}{4A\left(C^2-4AH\right)}+\lambda=\frac{D(AD-BC)+B^2H}{C^2-4AH}+\lambda=V_{opt}\quad(41)$$

досягається на стратегії $y_{opt}=y_{min}=\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}$. Відповідне рівняння (21) має вид:

$$V_{opt}=S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\,\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)=$$

$$=\frac{D(AD-BC)+B^2H}{C^2-4AH}+\lambda=$$

$$=Ax^2+Bx+Cx\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}+D\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}+$$

$$+H\left(\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)^2+\lambda=$$

$$=S\left(x,\,\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)=S\left(x,\,y_{opt}\right).\qquad(42)$$

Воно зводиться до рівняння

$$Ax^2+Bx+Cx\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}+D\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}+H\left(\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)^2-\frac{D(AD-BC)+B^2H}{C^2-4AH}=$$

$$=Ax^2+x\frac{4ABH-BC^2+BC^2-2ADC}{4AH-C^2}+\frac{\left(BDC-2AD^2\right)\left(4AH-C^2\right)+H(BC-2AD)^2}{\left(4AH-C^2\right)^2}+\frac{D(AD-BC)+B^2H}{4AH-C^2}=$$

$$=Ax^2+x\frac{2A(2BH-DC)}{4AH-C^2}+\frac{4AHBDC-8A^2D^2H-BDC^3+2AD^2C^2+HB^2C^2-4AHBDC+4A^2D^2H}{\left(4AH-C^2\right)^2}+$$

$$+\frac{\left[D(AD-BC)+B^2H\right]\left(4AH-C^2\right)}{\left(4AH-C^2\right)^2}=Ax^2+x\frac{2A(2BH-DC)}{4AH-C^2}+\frac{-BDC^3+2AD^2C^2+HB^2C^2-4A^2D^2H}{\left(4AH-C^2\right)^2}+$$

$$+\frac{4A^2D^2H-4ABDCH+4AB^2H^2-AD^2C^2+BDC^3-B^2HC^2}{\left(4AH-C^2\right)^2}=Ax^2+x\frac{2A(2BH-DC)}{4AH-C^2}+$$

$$+\frac{AD^2C^2-4ABDCH+4AB^2H^2}{\left(4AH-C^2\right)^2}=Ax^2+x\frac{2A(2BH-DC)}{4AH-C^2}+A\frac{(DC-2BH)^2}{\left(4AH-C^2\right)^2}=$$

$$=A\left[x^2+2x\frac{2BH-DC}{4AH-C^2}+\frac{(2BH-DC)^2}{\left(4AH-C^2\right)^2}\right]=A\left(x+\frac{2BH-DC}{4AH-C^2}\right)^2=0.\qquad(43)$$

З (43) випливають розв’язки $x_1=x_2=\frac{DC-2BH}{4AH-C^2}$ рівняння (42). Оскільки $2HB-DC>0$, то $\frac{DC-2BH}{4AH-C^2}>0$. Умова $2H(2A+B)-C(C+D)<0$ еквівалентна нерівності $4AH-C^2<CD-2BH$, звідки значення $\frac{DC-2BH}{4AH-C^2}\in(0;\,1)$. Тому $x_{opt}=\frac{DC-2BH}{4AH-C^2}$ і розв’язок гри

$$\mathscr{X}=\left\{\frac{DC-2BH}{4AH-C^2},\,\frac{BC-2AD}{4AH-C^2},\right.$$

$$\left.\frac{D(AD-BC)+B^2H}{C^2-4AH}+\lambda\right\}.\qquad(44)$$

При $2H(2A+B)-C(C+D)\geqslant 0$ із (37) слідує те, що точка $y_{\min} \geqslant -\dfrac{2A+B}{C}$, причому різниця (40) дає $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \geqslant -\dfrac{2A+B}{C}$. Крім того, тут $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\dfrac{2A+B}{C};\, 1\right]$ при недодатній різниці

$$y_{\min}^{\langle 1\rangle} - 1 = -\frac{C+D}{2H} - 1 = -\frac{C+D+2H}{2H}, \qquad (45)$$

тобто при $C+D+2H \geqslant 0$.

Обмеження 6. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C \geqslant 0$, $2HB-DC>0$, $2H(2A+B)-C(C+D) \geqslant 0$, $C+D+2H \geqslant 0$.

Оскільки для точки $y_{\min}^{\langle 0\rangle} > -\dfrac{B}{C}$ виконано (38), для точки $y_{\min} \geqslant -\dfrac{2A+B}{C}$ виконано нерівність

$$S\left(x_{\max}, -\frac{B}{C}\right) > S\left(x_{\max}, -\frac{2A+B}{C}\right) \geqslant$$
$$\geqslant S(x_{\max}, y_{\min}), \qquad (46)$$

і для точки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\dfrac{2A+B}{C};\, 1\right]$ виконано дві нерівності

$$\left\{S(1,1) \geqslant S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right),\right.$$
$$\left. S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) \leqslant S\left(1, -\frac{2A+B}{C}\right)\right\}, \qquad (47)$$

то мінімум функції (7) на сегменті Y:

$$\min_{y\in[0;\,1]} \max_{x\in[0;\,1]} S(x, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{B}{C}\right]} S(0, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\, -\frac{2A+B}{C}\right]} S(x_{\max}, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2A+B}{C};\, 1\right]} S(1, y)\right\} =$$
$$= \min\left\{\min\left\{S(0,0),\, S\left(0, -\frac{B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(x_{\max}, -\frac{B}{C}\right),\, S\left(x_{\max}, -\frac{2A+B}{C}\right)\right\},\ S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)\right\} =$$
$$= \min\left\{S\left(0, -\frac{B}{C}\right),\, S\left(x_{\max}, -\frac{2A+B}{C}\right),\, S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)\right\} = S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = S\left(1, -\frac{C+D}{2H}\right) = A+B-\frac{(C+D)^2}{4H}+\lambda = V_{opt} \qquad (48)$$

досягається на стратегії $y_{opt} = y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{C+D}{2H}$. Відповідне рівняння (21) має вид:

$$V_{opt} = S\left(1, -\frac{C+D}{2H}\right) = A+B-\frac{(C+D)^2}{4H}+\lambda =$$
$$= Ax^2 + Bx + Cx\left(-\frac{C+D}{2H}\right) + D\left(-\frac{C+D}{2H}\right) +$$
$$+H\left(-\frac{C+D}{2H}\right)^2 + \lambda = Ax^2 +$$
$$+x\left[\frac{2BH - C(C+D)}{2H}\right] - D\frac{C+D}{2H} + \frac{(C+D)^2}{4H} + \lambda =$$
$$= S\left(x, -\frac{C+D}{2H}\right) = S(x, y_{opt}). \qquad (49)$$

Переписавши рівняння (49) як

$$Ax^2 + x\left[\frac{2BH - C(C+D)}{2H}\right] - D\frac{C+D}{2H} + \frac{(C+D)^2}{4H} -$$
$$-A - B + \frac{(C+D)^2}{4H} = Ax^2 + x\left[\frac{2BH - C(C+D)}{2H}\right] + \frac{C(C+D) - 2H(A+B)}{2H} =$$
$$= A\left(x^2 + x\left[\frac{2BH - C(C+D)}{2AH}\right] + \frac{C(C+D) - 2H(A+B)}{2AH}\right) = A(x-1)\left(x - \frac{C(C+D) - 2H(A+B)}{2AH}\right) = 0, \qquad (50)$$

отримуємо його корені $x_1 = 1$ та $x_2 = \dfrac{C(C+D) - 2H(A+B)}{2AH}$. Але із вихідної умови $2H(2A+B) - C(C+D) \geqslant 0$ випливає нерівність

$$2H(A+B) - C(C+D) \geqslant -2HA > 0, \qquad (51)$$

яка означає, що $x_2 \geqslant 1$. Тому $x_{opt} = 1$ і розв'язок гри

$$\mathscr{X} = \left\{1, -\frac{C+D}{2H}, A+B-\frac{(C+D)^2}{4H}+\lambda\right\}. \qquad (52)$$

Обмеження 7. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C \geqslant 0$, $2HB-DC>0$, $2H(2A+B)-C(C+D) \geqslant 0$, $C+D+2H<0$.

Маємо нерівності (38), (46) та

$$S\left(1, -\frac{2A+B}{C}\right) > S(1,1) > S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) \qquad (53)$$

для точки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} > 1$. Тоді мінімум функції (7) на сегменті Y:

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]} S(0,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,-\frac{2A+B}{C}\right]} S(x_{max},\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2A+B}{C};\,1\right]} S(1,\,y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{S(0,\,0),\,S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right),\,S\left(x_{max},\,-\frac{2A+B}{C}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(1,\,-\frac{2A+B}{C}\right),\,S(1,\,1)\right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right),\,S\left(x_{max},\,-\frac{2A+B}{C}\right),\,S(1,\,1)\right\} = S(1,\,1) = A+B+C+D+H+\lambda = V_{opt} \qquad (54)$$

досягається на стратегії $y_{opt} = 1$. Коренями відповідного рівняння (21):

$$V_{opt} = S(1,\,1) = A+B+C+D+H+\lambda = Ax^2 + Bx +$$
$$+Cx + D + H + \lambda = A(x-1)\left(x + \frac{A+B+C}{A}\right) +$$
$$+A+B+C+D+H+\lambda = S(x,\,1) = S(x,\,y_{opt}) \qquad (55)$$

є $x_1 = 1$ та $x_2 = -\frac{A+B+C}{A}$. Але із умови $2A+B+C \geqslant 0$ слідує $-\frac{A+B+C}{A} \geqslant 1$, тому $x_{opt} = 1$ і розв'язок гри

$$\mathscr{X} = \{1,\,1,\,A+B+C+D+H+\lambda\}. \qquad (56)$$

Рухаючись далі, при параметрах $C > 0$, $D < 0$, які з'явились уперше у четвертому обмеженні, ставимо нерівність $2A+B+C < 0$. Очевидно, що, як і у другому обмеженні, при $B + C \geqslant 0$ максимумом поверхні (2) по x на сегменті $X = [0;\,1]$ є функція (24). З різниць (14) і (30) випливає, що при $2HB - DC < 0$ точки $y_{min} < -\frac{B}{C}$ та $y_{min}^{\langle 0\rangle} \in \left(0;\,-\frac{B}{C}\right)$. Це обумовлює наступну серію обмежень.

Обмеження 8. $C > 0$, $D < 0$, $2A+B+C < 0$, $B+C \geqslant 0$, $2HB - DC < 0$.

Для точки $y_{min} < -\frac{B}{C}$ виконано нерівність (25), а для точки $y_{min}^{\langle 0\rangle} \in \left(0;\,-\frac{B}{C}\right)$ має місце система

$$\left\{S(0,\,0) > S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right),\,S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right) < S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\}. \qquad (57)$$

Тоді мінімум функції (24) на сегменті Y:

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) =$$
$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]} S(0,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,1\right]} S(x_{max},\,y)\right\} =$$
$$= \min\left\{S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right),\,\min\left\{S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right),\,S(x_{max},\,1)\right\}\right\} =$$
$$= \min\left\{S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right),\,S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right)\right\} = S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right) =$$
$$= S\left(0,\,-\frac{D}{2H}\right) = \lambda - \frac{D^2}{4H} = V_{opt} \qquad (58)$$

досягається на стратегії $y_{opt} = y_{min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{D}{2H}$, звідки з відповідного рівняння (35) випливає $x_{opt} = 0$ та розв'язок (36) даної СОВАГ.

При $2HB - DC \geqslant 0$ точки $y_{min} \geqslant -\frac{B}{C}$ та $y_{min}^{\langle 0\rangle} \geqslant -\frac{B}{C}$. З різниці

$$y_{min} - 1 = \frac{BC - 2AD}{4AH - C^2} - 1 = \frac{BC - 2AD - 4AH + C^2}{4AH - C^2} =$$
$$= \frac{C(B+C) - 2A(D+2H)}{4AH - C^2} \qquad (59)$$

випливає, що точка $y_{min} \in \left[-\frac{B}{C};\,1\right]$ при $C(B+C) - 2A(D+2H) \geqslant 0$.

Обмеження 9. $C > 0$, $D < 0$, $2A+B+C < 0$, $B+C \geqslant 0$, $2HB - DC \geqslant 0$, $C(B+C) - 2A \times \times (D+2H) \geqslant 0$.

Тут виконана нерівність

$$S(0,\,0) > S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right) \geqslant S\left(0,\,y_{min}^{\langle 0\rangle}\right), \qquad (60)$$

для точки $y_{min}^{\langle 0\rangle} \geqslant -\frac{B}{C}$ та система двох нерівностей

$$\left\{S\left(x_{max},\,-\frac{B}{C}\right) \geqslant S(x_{max},\,y_{min}),\right.$$
$$\left.S(x_{max},\,y_{min}) \leqslant S(x_{max},\,1)\right\} \qquad (61)$$

для точки $y_{min} \in \left[-\frac{B}{C};\,1\right]$. Тоді мінімум функції (24) на сегменті Y

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]} S(x,\,y) =$$
$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]} S(0,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,1\right]} S(x_{max},\,y)\right\} =$$
$$= \min\left\{\min\left\{S(0,\,0),\,S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\},\,S(x_{max},\,y_{min})\right\} =$$

$$=\min\left\{S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right),\,S\left(x_{\max},\,y_{\min}\right)\right\}=$$

$$=S\left(x_{\max},\,y_{\min}\right)=S\left(-\frac{B+Cy}{2A},\,\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)=$$

$$=S\left(\frac{DC-2BH}{4AH-C^2},\,\frac{BC-2AD}{4AH-C^2}\right)=$$

$$=\frac{D\left(AD-BC\right)+B^2H}{C^2-4AH}+\lambda=V_{opt} \qquad (62)$$

досягається на стратегії $y_{opt}=y_{\min}=\dfrac{BC-2AD}{4AH-C^2}$. З відповідного рівняння (42) випливає $x_{opt}=\dfrac{DC-2BH}{4AH-C^2}$ та розв'язок (44) даної СОВАГ.

Обмеження 10. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C<0$, $B+C\geqslant 0$, $2HB-DC\geqslant 0$, $C\left(B+C\right)-2A\times\times\left(D+2H\right)<0$.

Має місце нерівність (60), а для точки $y_{\min}>1$ виконується

$$S\left(x_{\max},\,-\frac{B}{C}\right)>S\left(x_{\max},\,1\right)>S\left(x_{\max},\,y_{\min}\right), \qquad (63)$$

звідки мінімум функції (24) на сегменті Y:

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]}S\left(x,\,y\right)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{B}{C}\right]}S\left(0,\,y\right),\;\min_{y\in\left[-\frac{B}{C};\,1\right]}S\left(x_{\max},\,y\right)\right\}=$$

$$=\min\left\{\min\left\{S\left(0,\,0\right),\,S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right)\right\},\,\min\left\{S\left(x_{\max},\,-\frac{B}{C}\right),\,S\left(x_{\max},\,1\right)\right\}\right\}=\min\left\{S\left(0,\,-\frac{B}{C}\right),\,S\left(x_{\max},\,1\right)\right\}=$$

$$=S\left(x_{\max},\,1\right)=S\left(-\frac{B+C}{2A},\,1\right)=\frac{4AH-C^2}{4A}+\frac{2AD-BC}{2A}-\frac{B^2}{4A}+\lambda=D+H-\frac{\left(B+C\right)^2}{4A}+\lambda=V_{opt} \qquad (64)$$

досягається на стратегії $y_{opt}=1$. Відповідне рівняння (21) має вид

$$V_{opt}=S\left(-\frac{B+C}{2A},\,1\right)=D+H-\frac{\left(B+C\right)^2}{4A}+\lambda=Ax^2+$$

$$+Bx+Cx+D+H+\lambda=S\left(x,\,1\right)=S\left(x,\,y_{opt}\right), \qquad (65)$$

звідки випливає рівняння

$$Ax^2+Bx+Cx+\frac{\left(B+C\right)^2}{4A}=A\left(x+\frac{B+C}{2A}\right)^2=0 \qquad (66)$$

та корені $x_1=x_2=-\dfrac{B+C}{2A}$ рівняння (65). З вихідних умов $2A+B+C<0$ та $B+C\geqslant 0$ даного обмеження слідує, що значення $-\dfrac{B+C}{2A}\in\left[0;\,1\right)$ та $x_{opt}=-\dfrac{B+C}{2A}$. Звідси розв'язком гри при даному обмеженні є

$$\mathscr{X}=\left\{-\frac{B+C}{2A},\,1,\,D+H-\frac{\left(B+C\right)^2}{4A}+\lambda\right\}. \qquad (67)$$

Тепер накладемо умову $B+C<0$, яка дасть значення $-\dfrac{B}{C}>1$ та максимум (27), який випливає із (24). Глобальний мінімум (9) параболи (27) належить одиничному сегменту $Y=\left[0;\,1\right]$ при $D+2H\geqslant 0$. Тому далі слідують ще два обмеження.

Обмеження 11. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C<0$, $B+C<0$, $D+2H\geqslant 0$.

Так як для точки $y_{\min}^{\langle 0\rangle}\in\left(0;\,1\right]$ має місце система нерівностей

$$\left\{S\left(0,\,0\right)>S\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right),\,S\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)\leqslant S\left(0,\,1\right)\right\}, \qquad (68)$$

то мінімум параболи (27) на сегменті Y:

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]}S\left(x,\,y\right)=\min_{y\in[0;\,1]}S\left(0,\,y\right)=S\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)=$$

$$=S\left(0,\,-\frac{D}{2H}\right)=\lambda-\frac{D^2}{4H}=V_{opt} \qquad (69)$$

знову досягається на стратегії $y_{opt}=y_{\min}^{\langle 0\rangle}=-\dfrac{D}{2H}$, звідки з відповідного рівняння (35) випливає $x_{opt}=0$ та розв'язок (36) даної СОВАГ.

Обмеження 12. $C>0$, $D<0$, $2A+B+C<0$, $B+C<0$, $D+2H<0$.

Маємо точку $y_{\min}^{\langle 0\rangle}>1$ з відповідною подвійною нерівністю

$$S\left(0,\,0\right)>S\left(0,\,1\right)>S\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right), \qquad (70)$$

звідки мінімум параболи (27) на сегменті Y:

$$\min_{y\in[0;\,1]}\max_{x\in[0;\,1]}S\left(x,\,y\right)=\min_{y\in[0;\,1]}S\left(0,\,y\right)=$$

$$=\min\left\{S\left(0,\,0\right),\,S\left(0,\,1\right)\right\}=S\left(0,\,1\right)=$$

$$=D+H+\lambda=V_{opt} \qquad (71)$$

досягається на стратегії $y_{opt}=1$. Коренями відповідного рівняння (21):

$$V_{opt}=S\left(0,\,1\right)=D+H+\lambda=Ax^2+Bx+Cx+D+$$

$$+H+\lambda=Ax\left(x+\frac{B+C}{A}\right)+D+H+\lambda=$$

$$=S\left(x,\,1\right)=S\left(x,\,y_{opt}\right) \qquad (72)$$

є $x_1=0$ та $x_2=-\dfrac{B+C}{A}$. Але при $B+C<0$ корінь

$x_2 < 0$, тому $x_{opt} = 0$ і за вказаного обмеження розв'язок гри

$$\mathscr{X} = \{0, 1, D + H + \lambda\}. \quad (73)$$

Далі, вичерпавши усі варіанти обмежень при $C > 0$ та $D < 0$, переходимо до наступного обмеження.

Обмеження 13. $C < 0$, $D > 0$.

Оскільки $\left[-\frac{B}{C}; -\frac{2A+B}{C}\right] \cap [0; 1] = \varnothing$, то чиста стратегія другого гравця не може належати сегменту $\left[-\frac{B}{C}; -\frac{2A+B}{C}\right]$ і, відповідно, точка $x_{max} < 0$. А так як $A + B + Cy < 0$ при $y \in [0; 1]$, то максимумом поверхні (2) по x на сегменті $[0; 1]$ є парабола (27).

Для точки $y_{min}^{\langle 0 \rangle} < 0$ маємо нерівність (28), яка на стратегії $y_{opt} = 0$ дає мінімум (29), звідки розв'язком даної СОВАГ є (23).

Тепер покладатимемо параметри $C < 0$ та $D < 0$, за яких максимум (27) залишається, а точка $y_{min}^{\langle 0 \rangle} \in (0; 1]$ при $D + 2H \geqslant 0$.

Обмеження 14. $C < 0$, $D < 0$, $D + 2H \geqslant 0$.

Маємо систему (68) та мінімум (69), завдяки чому розв'язком гри при даному обмеженні є (36).

Обмеження 15. $C < 0$, $D < 0$, $D + 2H < 0$.

Маємо вирази (70) – (72), звідки відповідним розв'язком гри при даному обмеженні є (73).

Усі можливі сукупності обмежень розглянуті, отримані результати зібрані у табл. 1

Таблиця 1

Отримані результати

Обмеження з параметрами ядра (2) СОВАГ	Вид розв'язку СОВАГ
Обмеження 1. $C > 0$, $D > 0$, $2A + B + C \geqslant 0$	$\mathscr{X} = \{0, 0, \lambda\}$
Обмеження 2. $C > 0$, $D > 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C \geqslant 0$	
Обмеження 3. $C > 0$, $D > 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C < 0$	
Обмеження 13. $C < 0$, $D > 0$	
Обмеження 4. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C \geqslant 0$, $2HB - DC \leqslant 0$	$\mathscr{X} = \left\{0, -\frac{D}{2H}, \lambda - \frac{D^2}{4H}\right\}$
Обмеження 8. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C \geqslant 0$, $2HB - DC < 0$	
Обмеження 11. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C < 0$, $D + 2H \geqslant 0$	
Обмеження 14. $C < 0$, $D < 0$, $D + 2H \geqslant 0$	
Обмеження 5. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C \geqslant 0$, $2HB - DC > 0$, $2H(2A + B) - C(C + D) < 0$	$\mathscr{X} = \left\{\frac{DC - 2BH}{4AH - C^2}, \frac{BC - 2AD}{4AH - C^2}, \frac{D(AD - BC) + B^2H}{C^2 - 4AH} + \lambda\right\}$
Обмеження 9. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C \geqslant 0$, $2HB - DC \geqslant 0$, $C(B + C) - 2A(D + 2H) \geqslant 0$	
Обмеження 6. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C \geqslant 0$, $2HB - DC > 0$, $2H(2A + B) - C(C + D) \geqslant 0$, $C + D + 2H \geqslant 0$	$\mathscr{X} = \left\{1, -\frac{C + D}{2H}, A + B - \frac{(C + D)^2}{4H} + \lambda\right\}$
Обмеження 7. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C \geqslant 0$, $2HB - DC > 0$, $2H(2A + B) - C(C + D) \geqslant 0$, $C + D + 2H < 0$	$\mathscr{X} = \{1, 1, A + B + C + D + H + \lambda\}$
Обмеження 10. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C \geqslant 0$, $2HB - DC \geqslant 0$, $C(B + C) - 2A(D + 2H) < 0$	$\mathscr{X} = \left\{-\frac{B + C}{2A}, 1, D + H - \frac{(B + C)^2}{4A} + \lambda\right\}$
Обмеження 12. $C > 0$, $D < 0$, $2A + B + C < 0$, $B + C < 0$, $D + 2H < 0$	$\mathscr{X} = \{0, 1, D + H + \lambda\}$
Обмеження 15. $C < 0$, $D < 0$, $D + 2H < 0$	

Перегрупувавши отримані розв'язки при 15 розглянутих обмеженнях у табличному вигляді [2, 8, 9], бачимо, що усього є сім видів розв'язку, які визначаються певною сукупністю співвідношень між параметрами ядра – множини (23), (36), (44), (52), (56), (67), (73). Розв'язок (23) визначається оптимальними стратегіями гравців, що є лівими кінцями сегментів їх чистих стратегій. Розв'язок (56) визначається оптимальними стратегіями гравців, що є правими кінцями сегментів їх чистих стратегій. Нарешті, у розв'язку (73) перший гравець має оптимальну стратегію на лівому кінці сегмента $X = [0; 1]$, а другий гравець має оптимальну стратегію на правому кінці сегмента $Y = [0; 1]$.

Теорему доведено.

Висновок

Доведену теорему та проміжні результати її доведення можна використовувати для швидкого розв'язування антагоністичних ігор розглянутого класу та формування оптимальних рішень в конфліктно-керованих ситуаціях [10, 11], які можуть бути представлені як строго опукло-вгнута антагоністична гра з ядром виду (2), що задається на довільному прямокутнику простору $\mathbb{R}^2$ [12, 13]. Перспектива подальшого дослідження вбачається у доведенні теорем про виокремлення розв'язків для динамічних антагоністичних неперервних ігор, у яких залежність оптимальних стратегій гравців від часу фактично може бути представлена як залежність від параметрів ядра гри.

Список літератури

1. *Романюк В.В. Сім видів розв'язку однієї строго випуклої неперервної антагоністичної гри для задач оптимізації підприємницької конкурентної активності / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2009. – № 4, Т. 1. – С. 180-194.*
2. *Romanuke V.V. Visualizing the 25 subcases of the kernel attributes of a continuous strictly convex antagonistic game with the corresponding 11 types of the solution for the business competitive activity problems / V.V. Romanuke, V.P. Nezdorovin // Наука й економіка. – 2009. – № 4 (16), Т. 1. – С. 231-269.*
3. *Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. – 304 с.*
4. *Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьёв. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.*
5. *Оуэн Г. Теория игр: пер. с англ., 2-е изд. / Г. Оуэн. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.*
6. *Романюк В.В. Розв'язування строго випуклої антагоністичної гри з незалежністю від чистої стратегії першого гравця в стандартному рівнянні / В.В. Романюк // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Математичне моделювання і прикладна механіка. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – № 1. – С. 182-189.*
7. *Романюк В.В. Чотири опорних співвідношення для чотирьох видів розв'язку однієї строго випуклої неперервної антагоністичної гри / В.В. Романюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2008. – № 1. – С. 169-174.*
8. *Romanuke V.V. The nine solution forms of a continuous strictly convex-concave antagonistic game / V.V. Romanuke // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2008. – № 5, Т. 3. – С. 30-37.*
9. *Романюк В.В. Вісім базисних співвідношень для семи видів розв'язку однієї неперервної антагоністичної строго випукло-вгнутої гри / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2009. – № 1. – С. 226-234.*
10. *Суздаль В.Г. Теория игр для флота / В.Г. Суздаль. – М.: Воениздат, 1976. – 318 с.*
11. *Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Р.И. Трухаев. – М.: Наука, 1981. – 258 с.*
12. *Романюк В.В. Визначення оптимальних стратегій першого гравця у деяких нестрого випуклих антагоністичних іграх з єдиною оптимальною стратегією другого гравця / В.В. Романюк // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Вип. 479: Комп'ютерні системи та компоненти. – Чернівці: ЧНУ, 2009. – С. 52-56.*
13. *Романюк В.В. Оцінювання вірогідності розподілу статистичних частот випадкової величини з невідомим математичним сподіванням і дисперсією / В.В. Романюк // Вісник НТУ "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Х.: НТУ "ХПІ", 2010. – № 21. – С. 152-161.*

Надійшла до редколегії 10.11.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Б. Рудницький, Хмельницький національний університет, Хмельницький.

ТЕОРЕМА О СЕМИ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СТРОГО ВЫПУКЛО-ВОГНУТОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ С ЯДРОМ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

В.В. Романюк

Доказано теорему о семи видах решения одной строго выпукло-вогнутой антагонистической игры с ядром на единичном квадрате. Каждое решение, будучи представленным исключительно в чистых стратегиях игроков, определяется определённой совокупностью соотношений между пятью параметрами ядра.

Ключевые слова: *выпукло-вогнутая антагонистическая игра, решение игры, единичный квадрат, чистая стратегия, параметры ядра игры.*

A THEOREM ON SEVEN SOLUTIONS OF A STRICTLY CONVEX-CONCAVE ANTAGONISTIC GAME WITH KERNEL ON THE UNIT SQUARE

V.V. Romanuke

There has been proved the theorem on the seven solution types of a strictly convex-concave antagonistic game with the kernel on the unit square. Each solution, being stated exclusively in the pure strategies of the players, is determined by the definite aggregate of relationships between the five kernel parameters.

Keywords: *convex-concave antagonistic game, game solution, unit square, pure strategy, game kernel parameters.*