УДК 656.012

А.В. Попов, Д.Э. Лысенко

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются вопросы анализа логистических систем на основе применения моделей теории массового обслуживания, которые позволяют адекватно отображать потоковые процессы в реальных транспортных и складских системах. Особое внимание уделяется рассмотрению проблемы формализации звеньев распределенных логистических систем в стационарном и переходном режимах. Для переходного режима получено аналитическое решение относительно вероятностей состояний системы для конкретного примера с конечными буферами и конечным числом источников запросов.

***Ключевые слова**: логистическая система, модель массового обслуживания, потоковые процессы, стационарность, законы распределения, приоритеты, модели звеньев, логистические системы.*

Введение

Объектами исследования в логистике [1 – 3] являются материальные потоки, производственная деятельность или процесс выполнения заказов потребителей, продукция, организация, логистическая система или любая комбинация из них. Логистическая цепь (ЛЦ) представляет множество элементов логистической системы (множество предприятий и организаций, осуществляющих операции по доведению продукта от одной системы до другой), упорядоченное по материальному (информационному или финансовому) потоку с целью анализа или синтеза определенной совокупности процедур. Логистическая система (ЛС) – это упорядоченное множество (совокупность) элементов, находящихся в определенных связях и отношениях друг с другом, образующих определенную целостность и единство [1]. Анализ логистических систем представляет собой совокупность методов и средств выработки, принятия и обоснования решений при исследовании, формировании и управлении логистическими системами. Под анализом логистической системы понимается последовательность процедур её исследования [2]:

– логистическая система разбивается на составляющие части, имеющие меньший уровень сложности;

– выбираются и применяются наиболее подходящие специальные методы для решения отдельных задач;

– частные решения объединяются так, чтобы было построено общее решение глобальной задачи.

Основными этапами анализа логистической системы являются [3]:

– определение вида логистической системы;

– анализ структуры логистической системы;

– формулирование глобальной цели и критерия оценки эффективности функционирования логистической системы;

– декомпозиция цели, выявление потребностей в ресурсах и процессах;

– выявление доступных ресурсов и процессов, композиция целей;

– прогноз и анализ будущих условий;

– оценка целей и средств;

– отбор вариантов;

– оценка существующей логистической системы;

– построение программы развития;

– проектирования логистической организации для достижения целей логистической системы.

К принципам построения ЛС относятся: оптимальность, эмерджентность, иерархия, интеграция, формализация, синергизм. Последний принцип в логистике рассматривается как эффект взаимного усиления связей систем на уровне материального потока, т.е. совместный (корпоративный) эффект взаимодействия элементов в системе [4].

Логистическая проблема определяется как несоответствие между необходимым (желаемым) и фактическим положением логистической системы предприятия [1 – 3]. В частности, проблему можно сформулировать как несоответствие между логистическими потоками и ресурсами для их реализации, что хорошо описывается с помощью аппарата теории массового обслуживания.

Анализ логистической цепи является инструментом выявления тех видов работ, которые обладают потенциалом для создания конкурентного преимущества логистической системы предприятия. В данной работе рассматриваются модели системы массового обслуживания (СМО) для анализа звеньев логистических систем.

1. Особенности систем массового обслуживания для анализа ЛС

Пусть в буфер логистической системы поступают запросы (элементы логистических потоков) на выполнение определенных действий. Например, запросы на выполнения некоторых программ в информационной системе или работ ЛС. Запросы поступают через некоторый интервал времени $\tau_{инт}$ и обработка за время $\tau_{обр.}$

Обозначим $\lambda = \dfrac{1}{\tau_{инт.}}$; $\mu = \dfrac{1}{\tau_{обр.}}$, где λ – величина обратная среднему значению интервала $\tau_{инт}$ (интенсивность поступающих запросов), размерность $[\lambda] = \left[\dfrac{шт}{ед.вр}\right] = [\mu]$, где μ – величина, обратная среднему значению времени обработки, характеризующая интенсивность обработки.

Запросы попадают в буферные устройства, после чего эти они поступают в обработку по одному из следующих правил:

1) ППО – первым пришёл, первым обслужился;

2) ППосл.О – первым пришёл, последним обслужился;

3) относительные приоритеты (без прерывания) (рис. 1);

4) абсолютные приоритеты в системе с прерыванием (рис. 2).

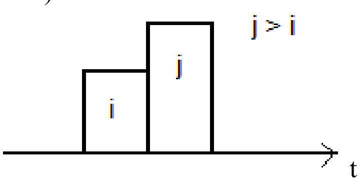

Рис. 1. Обработка запросов в системе с относительным приоритетом

Если в случае относительных приоритетов выполняется i-й запрос, то он полностью обслуживается даже при поступлении более приоритетного, после чего выполняется старший приоритет (рис. 1). В случае абсолютных приоритетов (с прерыванием) старший по приоритету запрос прерывает уже выполняемый младшим запрос с меньшим приоритетом (рис. 2).

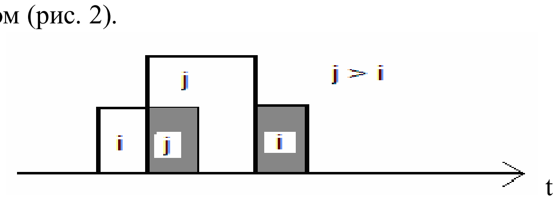

Рис. 2. Обработка запросов в системе с абсолютным приоритетом

2. Основные характеристики ЛС на основе моделей СМО

Рассмотрим следующие характеристики ЛС.

1. Загрузка системы:

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\tau_{обр.}}{\tau_{инт.}} < 1$ – условие стационарности работы системы.

В дальнейшем условимся, что время обработки или время интервала предполагаются случайными величинами, которые имеют определенный закон распределения.

2. P_n – вероятность того, что в системе находится n запросов:

$$P_n = \overline{0,1};\ n=0,1,2,...$$

3. Величина $K_б$ – емкость буфера, $K_б \le \infty$.

4. Число обслуживающих устройств: $N = 1, 2,\ldots, \infty$

5. L_c – среднее число запросов, находящихся в системе, то есть в буфере и обслуживающих устройствах.

6. L_o – среднее число запросов в буфере (очереди).

7. T_c – среднее время пребывания запросов в системе.

8. T_o – среднее время нахождения запроса в очереди или время ожидания.

9. Общая ёмкость СМО $K_c = K_б + N$.

Характеристики 5 – 8 являются случайными величинами, законы распределения которых зависят от законов распределения величин $\tau_{инт}$, $\tau_{обр}$ и особенностей ЛС как СМО.

В задачах анализа в качестве основных показателей функционирования ЛС могут быть использованы: вероятность простоя каналов обслуживания P_0; вероятность того, что в системе находится n требований P_n; среднее число находящихся в системе (сфере обслуживания) требований [5]:

$$L_c = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n;$$

среднее число находящихся в очереди требований:

$$L_o = \sum_{n=N}^{\infty} (n-N)P_n.$$

Среднее время ожидания требований в очереди T_o:

– для разомкнутой системы:

$$T_o = \frac{L_o}{\lambda},\ \text{(формула Литтла)},$$

где λ – интенсивность поступления потока требований в систему;

– для замкнутой системы:

$$T_o = \frac{L_o}{\lambda(m-L_o)},$$

где m – число требований, нуждающихся в обслуживании;

– среднее время пребывания требований в системе:

$$T_c = \frac{N_c}{\lambda(m-N_c)}.$$

Среднее число свободных каналов обслуживания:

$$N_{ск} = \sum_{n=1}^{N-1} (N-n)P_n .$$

Среднее число занятых каналов обслуживания:

$$N_{зк} = \sum_{n=1}^{N} nP_n .$$

Указанные выше характеристики СМО можно использовать для расчета соответствующих характеристик ЛС.

3. Классификация моделей логистических систем

Так как системы с дискретными состояниями получили широкое практическое применение в области анализа логистических систем, то наличие большого их количества требует выделения типовых систем. Наиболее распространенной системой классификации является схема Кендалла [5]:

$$G_1 / G_2 / N / K_c / m / D ,$$

где G_1, G_2 – законы распределения интервалов между запросами входящего потока требований и времени их обработки соответственно.

Закон распределения может принимать одно из следующих значений:

$$G_1 = M, E_г, H_k, D(a), R, \ldots ,$$

где M – экспоненциальный закон распределения; $E_г$ – закон Эрланга n-го порядка; H_k – гиперэкспоненциальный закон распределения k-го порядка; D(a) – закон распределения, когда $\tau_{инт}$ или $\tau_{обр}$ являются постоянными величинами, т.е. $\tau_{инт.} = const, \tau_{обр.} = const$; R – равномерный закон распределения.

Рассмотрим частный случай ЛС – систему коллективного пользования (рис. 3), для которого схема Кендела будет:

$$M / M / N / K_c / m / D ,$$

где K_c – общая емкость памяти системы:

$$K_c = K_б + N;$$

m – число источников запросов в замкнутой системе; D – дисциплина обслуживания; $K_б$ – емкость буфера; N – число каналов в системе.

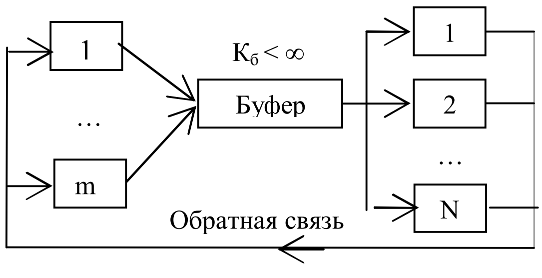

Рис. 3. Система коллективного пользования

Источники с номерами $\overline{(1..m)}$ подают свои запросы в буфер для решения своих задач на некотором технологическом оборудовании или компьютерах. Если источник подал запрос и не получил сигнал обратной связи о выполнении этого запроса, то очередной запрос источник подать не сможет.

В процессе работы в системе находятся не больше чем m запросов, т.е. $L_c \leq m$.

Если $G_1 = M$, то функция распределения интервалов между запросами, подчиняется следующему закону:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda .$$

Тогда a(t) – плотность распределениями величины $\tau_{инт}$, определяемая по формуле

$$a(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} .$$

Подобно этому записываются:

B(t) – функция распределения времени обслуживания;

b(t) – плотность распределения времени обслуживания:

$$B(t) = 1 - e^{-\mu t}; \quad b(t) = \mu e^{-\mu t} .$$

Таким образом, приведенная классификация позволяет обоснованно подойти к выбору наиболее подходящей модели СМО для анализа ЛС.

4. Стационарный режим логистической системы обслуживания с ожиданием

Рассмотрим систему M / G / 1 / ∞ /∞ / Fifo, где входящий поток запросов имеет следующие особенности:

а) поток имеет однородные запросы;

б) поток ординарный, т.е. в каждый момент времени поступает один запрос;

в) поток без последействия, т.е. поступление текущего запроса не зависит от поступивших ранее запросов;

г) поток стационарный;

д) интервалы между запросами и время обработки имеют экспоненциальный закон распределения:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \; a(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Для расчета таких систем получена формула Полячека-Хинчина [5].

$$L_c = \lambda(\beta_1 + \frac{\lambda \beta_2}{\alpha(1-\rho)}); \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

где β_1 – первый начальный момент времени обработки; β_2 – второй начальный момент времени обработки; L_c – означает среднее число требований в системе в стационарном режиме, где $\lambda T_c = L_c$ – формула Литтла, что справедливо и для длины очереди, то есть:

$$L_o = \lambda T_o, \; T_c = t_o + T_o .$$

Приведенная формула Литтла может быть использована для расчета времени ожидания и пребывания элементов логистических потоков в системе, а также среднего их числа в очереди и в самой системе.

5. Способы вычисления начальных моментов

5.1. Интегральный способ.

Первый начальный момент:

$$\beta_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)dt, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Для случая $G = M$ получим

$$\beta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)ftdt = \int_{-\infty}^{\infty} t\mu e^{-\mu t} = \frac{1}{\mu};$$

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \mu e^{-\mu t}dt ... = 2\frac{1}{\mu^2} = 2\beta_1^2.$$

Если подставить полученные моменты в формулу Полячека-Хинчина, то получим следующие формулы:

$$L_c = \frac{\rho}{1-\rho}, \; L_0 = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

$$T_c = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \; T_o = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Определим центральные моменты:

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \beta_1)^n f(t)dt \; ,$$

при G = M:

$$d_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \beta_1)\mu e^{-\mu t} = \beta_2 - \beta_1^2 = 2\beta_1^2 - \beta_1^2 = \beta_1^2 \; .$$

Если заданы экспериментальные данные, то начальные моменты можно вычислить с помощью соответствующих формул:

$$\beta_n = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^n}{N}; \; d_n = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \beta_1)^n}{N},$$

где x_i – значения измеренных величин.

5.2. Дифференциальный способ. Применение дифференциального способа заключается в использовании преобразования Лапласа:

$$L(S) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho t} f(t)dt \; .$$

Для G = M получим:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t};$$

$$L(S) = \frac{\mu}{\mu + S}.$$

Нахождение начального момента любого порядка осуществляется по формуле:

$$\beta_n = (-1)^n \left.\frac{d^n L(S)}{dS^n}\right|_{S=0}, \; \beta_1 = \frac{1}{\mu}, \; \beta_2 = 2\frac{1}{\mu^2}.$$

В случае G = Hк (гиперэкспоненциального закона распределения):

$$B(t) = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i e^{-\mu t}, \; \sum_{i=1}^{k} a_i = 1, b(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i e^{-\mu_i t_i = 1};$$

$$L(S) = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\mu_i}{\mu_i + S}, \; \beta_1 = \sum_{i=1}^{k} 2\frac{1}{\mu_i}, \; \beta_2 = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{2}{\mu_i^2}.$$

Для характеристики потоков обслуживания используется коэффициент вариации:

$$C = \frac{\sqrt{d_2}}{\beta_1} = \frac{\sqrt{\beta_2 - \beta_1^2}}{\beta_1} > 1,$$

где $\sqrt{d_2}$ – среднее квадратичное отклонение.

Для G = M, коэффициент вариации – $C = 1$.

Для распределения Эрланга ($G = E_r$) функция распределения принимает вид:

$$B(t) = 1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{(vt)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-vt}; \; v = \frac{1}{\tau_{обр}},$$

плотность распределения:

$$b(t) = \frac{(vt)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-vt};$$

$$L(S) = (\frac{\mu}{\mu + S})^r; \; \beta_1 = \frac{r}{v}; \beta_2 = \frac{r(r+1)}{v^2};$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{r}} < 1, r \geq 2\; .$$

Если r = 1, то $B(t) = 1 - e^{-vt}; b(t) = ve^{-vt}$.

Для вырожденного распределения (постоянное время обработки):

$$L(S) = e^{-\frac{1}{\mu}S}, \beta_1 = \frac{1}{\mu}, \beta_2 = \frac{1}{\mu^2}.$$

Очевидно, что выбор способа вычисления начальных и центральных моментов зависит от законов распределения изучаемых случайных величин.

6. Пример системы в переходном (нестационарном) режиме

Пусть имеем ЛС (рис. 4), для которой схема модели выглядит как M / M / 2 / 2 / 2 / Fifo, где число обслуживающих устройств равно 2; емкость системы – 2; число источников нагрузки – 2; тип обработки – Fifo.

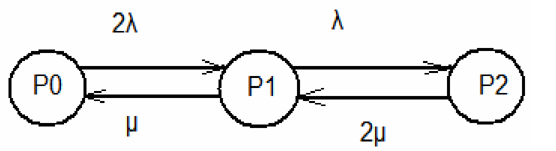

Рис. 4. Логистическая система в переходном режиме

Пусть P_n – вероятность нахождения в системе n-запросов, начальные условия $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$, $P_2(0) = 0$. Составим систему дифференциальных уравнений относительно P_n на основе графа (рис. 4):

$$\begin{cases} P_0' = -2\lambda P_0 + \mu P_1; \\ P_1' = 2\lambda P_0 - P_1(\lambda + \mu) + 2\mu P_2; \\ P_2' = \lambda P_1 - 2\mu P_2. \end{cases}$$

Решая эту систему при указанных начальных условиях, получим:

$$P_0 = \frac{\mu^2}{\lambda+\mu^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t};$$

$$P_1 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\lambda(\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} - \frac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t};$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t};$$

$$\sum_{i=1}^{2} P_i = 1, i = 0,1,2.$$

Графическое изображение полученного решения системы уравнений представлено на рис. 5.

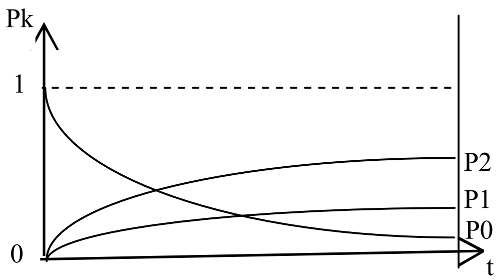

Рис. 5. График зависимости P_k от времени

Заключение

1. Стационарный режим СМО для моделирования ЛС и ЛЦ требует необходимых исходных данных в виде значений следующих величин: $G_1, G_2, N, Kc, m, D, \lambda, \mu$, что даёт возможность найти соответствующие характеристики L_c, L_0, T_c, T_0 отдельных звеньев систем и для всей ЛС.

2. Исследование модели ЛС с дискретным состоянием и непрерывным временем в нестационарном режиме требует наличие графа состояний и переходов, на основе которого можно составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вероятности состояний P_k. Аналитическое решение полученной системы уравнений дает возможность получать зависимости $P_k(\lambda,\mu,t)$ и построить для них графики. Зная значения P_n в любой момент времени, можно найти значение всех характеристик L_c, L_0, T_c, T_0 в зависимости от времени.

3. Если в исходной системе уравнений $\frac{\partial P_k}{\partial t} = 0$, то получим систему алгебраических уравнений, позволяющих найти зависимость P_k от λ и μ без учета времени, что позволит определить все остальные характеристики системы. Для нахождения характеристик СМО (T_c, T_0) как некоторых случайных величин с соответствующими законами распределения, необходима другая методика, в которой используются уравнения Полячека-Хинчина [5].

Список литературы

1. *Кальченко А.Г. Логістика / А.Г. Кальченко. – К.: КНЕУ, 2006. – 284 с.*

2.. *Гаджинский А.М. Практикум по логистике / А.М. Гаджинский. – М.: Дашков и Ко, 2009. – 312 с.*

3. *Окландер. М.А. Контуры экономической логистики / М.А. Окландер. – К.: Наукова думка, 2000. – 176 с.*

4. *Бауэрсокс Д. Логистика. Интегрированная цепь поставок / Д. Бауэрсокс, Д. Клосс. – 2-е изд. – М.: Олимп-Бизнес, 2008. – 640 с.*

5. *Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т.Л. Саати. – М.: Либроком, 2010. – 520 с.*

Поступила в редколлегию 17.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Е. Федорович, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

А.В. Попов, Д.Е. Лисенко

Розглядаються питання аналізу логістичних систем на основі застосування моделей теорії масового обслуговування, які дозволяють досить адекватно відображати потокові процеси в реальних транспортних і складських системах. Головну увагу приділено розгляду проблеми формалізації ланок розподілених логістичних систем в стаціонарному і перехідному режимах. Для перехідного режиму отримано аналітичне рішення щодо ймовірностей станів системи для конкретного прикладу з кінцевим буфером і кінцевим числом джерел запитів.

***Ключові слова**: логістична система, модель масового обслуговування, потокові процеси, стаціонарність, закони розподілу, пріоритети, моделі ланок, логістичні системи.*

PROBABILISTIC MODELS OF LOGISTIC SYSTEMS

A.V. Popov, D.E. Lysenko

The problems of analysis logistics systems of analysis through the use of models in queuing theory, which allow one to adequately display of streaming processes in real transport and storage systems. Main attention is paid to the problem distributed logistics systems links of the formalization in stationary and transient regimes. For the transition regime, an analytical solution of the probabilities states of the system for a specific example with the finite buffer and finite number of sources of requests is received .

***Keywords:** logistic system, model of mass service, stream processes, stationarity, distributing laws, priorities, models of links, logistic systems.*