

УДК 006.91.517.929.7

В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова

Кременчугський національний університет ім. М. Остроградського, Кременчуг, Україна

ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Проведены исследования математических моделей температурных полей с внутренними источниками тепла. Найдены численные решения задач в конечномерном пространстве с применением алгоритма Кранка–Николсона. Выполнены численные расчеты и построено температурное распределение. Проведены измерения температур во время процесса ТЦО конструктивных элементов и построены температурное распределение. Выполнен расчет неопределенности измерений температур с помощью пирометра. С учетом неопределенности измерения проведен сравнительный анализ расчетных значений температур, полученных с помощью модельного подхода и аппаратных измерений.

Ключевые слова: математическая модель, численный эксперимент, температурные поля, неопределенность измерений.

Постановка проблемы

При проектировании систем управления процессами термоциклической обработки (ТЦО) в порошковой металлургии необходимо предусматривать тщательный контроль температурных режимов. Получить информацию о температурных распределениях в отжигаемых изделиях можно как эмпирическим, с помощью непосредственных измерений, так и расчетным путем, используя соответствующие математические модели и анализируя полученные результаты.

Термоциклическая обработка представляет собой процесс термического воздействия, осуществляемого посредством непрерывного циклического изменения температуры и сопровождающегося многократными структурными или фазовыми превращениями в обрабатываемом материале при нагревах и охлаждениях с заданной скоростью. Такая обработка позволяет получать необходимые физико-механические свойства металла [1].

В работах [1 – 3] не проводилось сравнение температурных полей полученных расчетным путем и данных измерения с помощью измерительных приборов для оценки качества расчетов и оценки влияния внешних факторов на результаты замеров.

Целью работы является анализ (точности) полученных расчетов температурного поля по математической модели процесса термоциклической обработки металлов (ТЦО) с внутренними источниками тепла путем сравнения численных экспериментов с результатами замеров температуры при выполнении натурных экспериментов.

Реализация модельного подхода

Металлический стержень длиной L цилиндрической формы рассматривается в виде конечной изотропной области с постоянными теплофизиче-

скими характеристиками и параметрами. Рассматривается математическая модель температурного поля цилиндрической области, в которой действуют переменные внутренние источники тепла, $W(t, T)$ вызванные прохождением электрического тока через стержень. С математической точки зрения определение температурного поля приводит к решению неоднородного уравнения теплопроводности с переменными краевыми условиями и функцией источника в уравнении $\Omega \times t : \{0 < r < r_0, 0 < z < L, t > 0\}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(t, T); \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$T(r, 0, t) = T_1(t), \quad T(r, L, t) = T_2(t); \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4); \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = -\alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) - \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4);$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} =$$

$$= \alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4), \quad (5)$$

где T – температура; t – время; λ – коэффициент теплопроводности, положительно определенная непрерывная функция; ρ_n – плотность; $\alpha, \varepsilon, \sigma$ – соответственно коэффициент теплоотдачи, степень черноты и постоянная Стефана-Больцмана; r_0 – радиус; T_c, T_0 – соответственно температура среды и начальная температура, $T_c > T_0$; $W(t, T)$ – функция источников тепла

$$W(t, T) = f_1^i(t) \cdot f_2(T). \quad (6)$$

Функция $f_1^i(t)$ зависит от технологических особенностей процесса ТЦО и имеет вид

$$f_1^i(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_0} - 2n, & 2nt_0 \leq t \leq (2n+1)t_0; \\ -\frac{t}{t_0} + 2(n+1), & (2n+1)t_0 < t < (2n+2)t_0, \end{cases} \quad (7)$$

где t_0 – время одного термоцикла; n – номер термоцикла;

$$f_2(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}; \quad (8)$$

I, ρ_0, β – соответственно сила тока, удельное электросопротивление, температурный коэффициент сопротивления стержня.

Краевые условия (3) и (4) выбираются в зависимости от того, как воздействует тепловой поток на концы заготовки.

После интегрального преобразования [2] получаем краевую задачу в области $\Omega \times t : \{0 < z < L, t > 0\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1^i(t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} u^4 = \quad (9)$$

$$= c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} - F(t);$$

$$0 < z < L, \quad t > 0;$$

$$u(z, 0) = T_0; \quad (10)$$

$$u(0, t) = T_1(t); \quad u(L, t) = T_2(t), \quad (11)$$

где $F(t) = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f_1^i(t) + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} T_c^4$.

Задачу (9) – (11) решаем численным методом в пространстве сеточных функций с нормой $\|u(z, t)\|_U = \max_{z, t \in \Omega} |u(z, t)|$.

Строим, конечно-разностную схему Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности.

В области $\bar{\Omega} \times t \{0 \leq z \leq L, t > 0\}$ вводим равномерные сетки по длине (координата z) заготовки $\bar{\omega}_h = \{z_m = mh, m = 0, 1 \dots M\}$; временную сетку (координата t) $\bar{\omega}_{\Delta t} = \{t_j = j\Delta t, j = 0, 1 \dots j_0\}$ с интервалами: $h = L / M, \Delta t = t_0 / j_0$.

Решение задачи в области Ω ищем в виде решения системы нелинейных алгебраических уравнений для сеточной функции, которую обозначим как $u_{i,j}$.

$$c\rho_n \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2h^2} (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + F_2(u_{i,j}, t), \quad (12)$$

где

$$F_2(u_{i,j}, t) = \left[\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1^i(t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u_{i,j} - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} u_{i,j}^4 + F(t).$$

На концах заготовки разностный аналог краевого условия (4) имеет вид

$$\frac{-u_{2,j+1} + 4u_{1,j+1} - 3u_{0,j+1}}{2h} = \alpha(T) f_1^i(t) (T_c - u_{1,j}) + \varepsilon\sigma f_1^i(t) (T_c^4 - u_{1,j}^4);$$

$$\frac{3u_{M,j+1} - 4u_{M-1,j+1} + 3u_{M-2,j+1}}{2h} =$$

$$-\alpha(T) f_1^i(t) (T_c - u_{M,j}) - \varepsilon\sigma f_1^i(t) (T_c^4 - u_{M,j}^4).$$

Полученную систему решаем итерационным методом [4, 5].

Численные расчеты проводились с использованием разработанной компьютерной программы.

Результаты экспериментов

Численные расчеты температурных полей и натурные эксперименты процессов ТЦО проводились для изделий из железа с теплофизическими характеристиками материала и параметрами процесса

$$\rho_n = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad c = 0,46 \frac{\text{кДж}}{\text{кгК}}; \quad \lambda = 129 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}};$$

$$\alpha = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}} \text{ радиусом } r_0 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м и длиной}$$

$L = 0,25 \text{ м}$; начальной температурой $T_0 = 270^\circ \text{ К}$ и временем одного термоцикла $t_0 = 60 \text{ с}$.

Измерения температур проводились пирометром с исчезающей нитью накала «Проминь-М» во время процесса ТЦО конструктивных элементов водяных насосов на государственном предприятии «Инженерный центр твердых сплавов» «Светкермет» Министерства промышленной политики Украины. Технические характеристики пирометра: измеряемая температура – 900 – 1400 °С; дискретность измерения – 1 °С; предел допускаемого значения основной погрешность – 14 °С; предел допускаемого значения среднего квадратического отклонения случайной составляющей основной погрешности – 2,5 °С.

Расчетные значения температуры во время ТЦО были получены для функции источника тепла $f_1^i(t)$, при которой один термоцикл состоит из двух фаз – подъема и снижения температуры за счет увеличения и уменьшения действующей силы тока.

Результаты сравнения численных расчетов и замеров приведены в таблице 1. Поскольку замеры проводились многократно в таблице приведено среднее арифметическое значение измерения температур. Из полученного ряда наблюдений были исключены значения, которые отличались от модельного значения более чем на 20%. На графике рис. 1, 2 изображены температурные распределения, полученные в результате расчета и измерения температуры с помощью пирометра «Проминь-М».

Результаты сравнения численных расчетов и замеров

Длительность процесса, мин.	Температура расчетная, °K	Температура измерения, °K	Полный результат измерения	$\Delta = T_{\text{изм}} - T_{\text{расч}}$
0	270	270	270 ± 8	0 ± 8
20	306,2	306	306 ± 7	$-0,2 \pm 7$
40	342,5	353	353 ± 6	$10,5 \pm 6$
60	404,8	401	401 ± 6	$-3,8 \pm 6$
80	453,7	468	468 ± 5	$14,3 \pm 5$
100	476,8	491	491 ± 4	$14,2 \pm 4$
120	481,4	465	465 ± 5	$-16,4 \pm 5$
140	525,3	541	541 ± 4	$15,7 \pm 4$
160	613,8	632	632 ± 3	$18,2 \pm 3$
180	668,7	682	682 ± 3	$13,3 \pm 3$
200	643,1	656	656 ± 3	$12,9 \pm 3$
220	624,5	617	617 ± 4	$-7,5 \pm 4$
240	728,9	739	739 ± 3	$10,1 \pm 3$
260	824,7	841	841 ± 3	$16,3 \pm 3$
280	767,6	783	783 ± 3	$15,4 \pm 3$
300	725,4	740	740 ± 3	$14,6 \pm 3$
320	757,6	773	773 ± 3	$15,4 \pm 3$
340	904,5	919	919 ± 2	$14,5 \pm 2$
360	953,3	967	967 ± 2	$13,7 \pm 2$
380	826,3	838	838 ± 3	$11,7 \pm 3$
400	756,1	737	737 ± 3	$-19,1 \pm 3$
420	934,8	949	949 ± 2	$14,2 \pm 2$
440	1073,6	1090	1090 ± 2	$16,4 \pm 2$
460	928,5	943	943 ± 2	$14,5 \pm 2$
480	824,5	809	809 ± 3	$-15,5 \pm 3$
500	892,4	905	905 ± 2	$12,6 \pm 2$
520	1103,3	1120	1120 ± 2	$16,7 \pm 2$
535	1181,8	1200	1200 ± 2	$18,2 \pm 2$

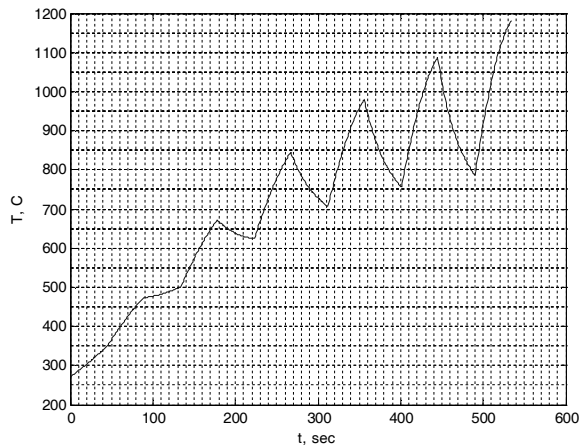


Рис. 1. Расчетное температурное распределение для $z = \frac{1}{2}$

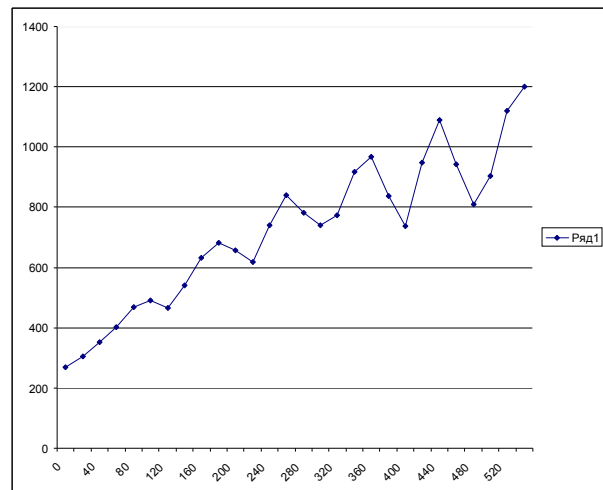


Рис. 2. Замеры температуры для $z = \frac{1}{2}$

Чтобы более точно оценить адекватность модели значениям измерений рассчитывалась расширенная неопределенность [6, 7]. Расчетные значения температуры и значения, полученные при измерении температуры во время технологической операции ТЦО, отличаются друг от друга в допустимых границах погрешности устройства измерения. Это свидетельствует о высокой точности построенной модели и ее адекватности аппаратным измерениям.

Выводы

Использование неопределенности измерения позволяет адекватно оценить соответствие математической модели реальному технологическому процессу. Построенная модель может быть использована для проектирования автоматизированных систем управления процессами термообработки в порошковой металлургии. Полученные результаты позволяют разрабо-

тять програмне забезпечення для знаходження оптимальних параметрів процесу термічної обробки для систем управління. Введення в систему управління блока, що враховує неопределенність вимірювання, дозволить більш точно регулювати температуру в час технологічного процесу.

Список литературы

1. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов / И.И. Новиков. – М. Металлургия, 1978. – 392 с.
2. Ляшенко В.П. Математична модель термоциклічної обробки металевих виробів / В.П. Ляшенко // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук, 2003. – Вип. 6 (23). – С. 8-11.
3. Ляшенко В.П., Григорова Т.А. Дискретизація одного рівняння теплопровідності з циклічними крайовими умовами / В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне

модельювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009. – Вип. 11, № 847. – С. 116-122.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

5. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

6. Захаров И.П. Оценивание неопределенности измерений: эволюция нормативной базы и основных подходов / И.П. Захаров, С.В. Водотыка // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2009. – Вип. 5 (79).

7. Рекомендация 1 (СІ-1981) Международного комитета мер и весов Руководство по выражению неопределённости измерения, ГП «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева». – СПб, 1999.

Поступила в редколлегию 8.12.2010

Рецензент: д-р тех. наук, проф. В.А. Ванин, Институт проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного, Харьков.

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ

В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова

Проведені дослідження математичних моделей температурних полів з внутрішніми джерелами тепла. Знайдені чисельні рішення задач у скінченномірному просторі із застосуванням алгоритму Кранка–Николсона. Виконані чисельні розрахунки і побудовано температурний розподіл. Проведені вимірювання температур під час процесу ТЦО конструкційних елементів і побудовано температурний розподіл. Виконано розрахунок невизначеності вимірювань температур за допомогою пірометра. З урахуванням невизначеності вимірювання проведено порівняльний аналіз розрахункових значень температур, отриманих за допомогою модельного підходу і апаратних вимірювань.

Ключові слова: математична модель, чисельний експеримент, температурні поля, невизначеність вимірювань.

UNCERTAINTY OF MEASUREMENT OF THE TEMPERATURE FIELDS ESTIMATION

V.P. Lyashenko, T.A. Grigorova

Researches of mathematical models of temperature fields with the internal sources of heat are conducted. The numerical solution of problems are found at finite-dimensional space with the use of Krank–Nicolson algorithm. Numerical calculations are executed and the temperature distributing is built. Measurements of temperatures are conducted during the thermocyclic treatment process of construction elements and built temperature distribution. The calculation of uncertainty of measurement of temperatures is executed by a pyrometer. Consideration the uncertainty of measurement the comparative analysis of calculation values of temperatures, got by model approach and apparatus measurements is conducted.

Keywords: mathematical model, numeral experiment, temperature fields, uncertainty of measurement.