УДК 519.713

В.В. Косенко[1], О.В. Шевченко[2]

[1]Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків
[2]Національний університет оборони України, Київ

КОМБІНАТОРНИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У статті запропонований комбінаторний метод моделювання випадкових процесів, які не мають гауссівського або субгауссівського характеру та повинні бути реалізовані за однією або невеликою сукупністю реалізацій.

Ключові слова: *випадковий процес, ергодичність, синтез, нестаціонарність.*

Вступ

Актуальність теми. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі випадкових процесів, дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день інтенсивно розробляються різні методи стохастичного моделювання, зокрема, чисельного моделювання випадкових процесів, зростає також сфера застосування стохастичних моделей в різних областях природничих та соціальних наук, таких як радіотехніка, електроніка, соціологія, океанологія, фінансова математика, метеорологія, теорія масового обслуговування тощо.

Найбільш широко розроблені методи моделювання гауссових випадкових процесів і полів. Традиційними для них є методи лінійного перетворення, ковзаючого підсумовування, авторегресії та ковзаючого середнього, метод канонічних представлень, метод подвійної рандомізації, неканонічного розкладу. В більшості робіт, присвячених комп'ютерному моделюванню випадкових процесів, не вивчаються питання про точність та надійність побудованих моделей [1, 2]. Але, фактично, не вивчались моделі, що наближають з даною точністю та надійністю випадкові процеси, що не є гауссовими або субгауссовими. Крім того, взагалі не будувались моделі, що наближають задані процеси та деякі функціонали від них, такі, наприклад, як похідна, з заданою точністю та надійністю. Зрозуміло, що побудова таких моделей є актуальною задачею.

Практичний інтерес представляє розробка методів цифрового моделювання випадкових процесів (ВП), заданих одномірною щільністю розподілу (ОЩР) f(x, t) і кореляційною функцією (КФ) R(S, t). У загальному випадку, коли ОЩР не є гаусівською, застосування методу нелінійного перетворення викликає труднощі через складність визначення КФ вихідного нормального ВП. Інші відомі методи (метод неканонічного представлення і рандомізації) не дозволяють одержувати реалізації ВП ергодичними відносно заданих ОЩР і КФ [1 – 3].

Мета статті: розробити комбінаторний підхід до моделювання ВП з потрібними ОЩР і КФ, що дозволяє синтезувати ВП або одною реалізацією, або сукупністю реалізацій.

1. Сильностаціонарні і сильноергодичні випадкові процеси

Нехай

$$\left\| x_i^{(k)} \right\|_{i=1,\dots,\infty}^{k=1,\dots,\infty} - \tag{1}$$

гіпотетичний ансамбль дискретних реалізацій деякого ВП, де $x_i^{(k)}$ – i-й відлік у k-й реалізації, тобто $x_i^{(k)} = x^{(k)}(i\Delta t)$ (Δt – крок дискретизації параметра). Нехай також θ – деяка ймовірнісна характеристика ВП. Оскільки у виразі (1) присутні дві змінні (номер реалізації та час), то можна записати такі оцінки для θ:

$$\hat{\theta}_t^{(L)} = \frac{1}{L}\sum_{k=L_t+1}^{L_t+L} g\left[x_t^{(k)}\right]; \quad \hat{\theta}_R^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=N_k+1}^{N_k+N} g\left[x_t^{(R)}\right];$$

$$\hat{\theta}_{cp}^{(L,N)} = \frac{1}{LN}\sum_{k=L_i+1}^{L_t+L}\sum_{i=N_k+1}^{N_k+N} g\left[x_i^{(k)}\right],$$

де $g[\cdot]$ – оператор перетворення даних. Будемо вважати, що $\hat{\theta}_t^{(L)}$, $\hat{\theta}_k^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=N_k+1}^{N_k+N} g\left[x_t^{(R)}\right]$ і $\hat{\theta}_{cp}^{(L,N)} = \frac{1}{LN}\sum_{k=L_i+1}^{L_t+L}\sum_{i=N_k+1}^{N_k+N} g\left[x_i^{(k)}\right]$ сходяться до деяких θ_t, θ_k, θ_{cp} при $L \to \infty$ і $N \to \infty$.

ВП є ***стаціонарним*** відносно θ, якщо $\theta_t = \text{const}$; ВП є ***ергодичним*** відносно θ, якщо $\theta_k = \text{const}$. Очевидно, якщо ВП стаціонарний, то $\theta_t = \theta_{cp}$; якщо ВП ергодичний, то $\theta_k = \theta_{cp}$; якщо ВП стаціонарний і ергодичний, то $\theta_t = \theta_{cp} = \theta_k$.

ВП є ***сильностаціонарним*** відносно θ, якщо для $\forall N_k$ $\hat{\theta}_k^{(N)} = \theta_k + \varepsilon_{k,N}$, де $\varepsilon_{k,N}$ – випадкова величина з $M[\varepsilon_{k,N}] = 0$ і $D[\varepsilon_{k,N}] = \sigma_{k,N}^2 < \infty$. ВП є ***сильноергодичними*** відносно θ, якщо для будь-якого L_t $\hat{\theta}_t^{(L)} = \theta_t + \varepsilon_{t,L}$, де $\varepsilon_{t,L}$ – випадкова величина з $M[\varepsilon_{t,L}] = 0$, $D[\varepsilon_{t,L}] = \sigma_{t,L}^2 < \infty$.

Можна показати, що мають місце наступні твердження:

1) наслідком сильної стаціонарності є стаціонарність;

2) наслідком сильної ергодичності є ергодичність;

3) якщо ВП стаціонарний і сильноергодичний, то він і сильностаціонарний;

4) якщо ВП сильностаціонарний і ергодичний, то він і сильноергодичний.

Формально можна розрізняти сім класів ВП щодо характеристики θ: стаціонарні ергодичні (С-Е), стаціонарні неергодичні (С-НЕ), нестаціонарні ергодичні (НС-Е), нестаціонарні неергодичні (НС-НЕ), сильностаціонарні сильноергодичні (СС-СЕ), сильностаціонарні неергодичні (СС-НЕ), нестаціонарні сильноергодичні (НС-СЕ).

2. Синтез однією реалізацією

Нехай ВП x(t), $\{0 \le t \le T\}$, задані ОЩР f(x) і КФ R(τ) і обраний крок дискретизації $\Delta t = T/N$. Запропонований метод моделювання реалізації ВП $(x_1, \dots, x_N)$ полягає в послідовному виконанні N кроків. На першому кроці в якості x_1 береться випадкове число з щільністю розподілу f(x). На кроці n (n = 2, … , N) відлік вибирається з множини $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1,\dots,L}$ (що містить при n = 2 L незалежних випадкових чисел із щільністю розподілу f(x)) таким чином, щоб досягти мінімуму функціонала

$$\Phi^{(n)} = \sum_{k=1}^{M^{(n)}} \left(R[k] - \hat{R}^{(n)}[k]\right)^2, \tag{2}$$

де R[k] = R(kΔt); $\hat{R}^{(n)}[k]$ – оцінка КФ на послідовності $(x_1, \dots, x_N)$; $M(n) = \begin{cases} n-1, & \text{если} \quad n \le M; \\ M, & \text{если} \quad n > M; \end{cases}$ M – задане число відліків КФ на інтервалі кореляції.

Після вибору $x_n = \xi_i \in \Xi$ елемент ξ_i видаляється з Ξ і на його місце міститься нове випадкове число зі щільністю f(x).

ВП за побудовою є СС-СЕ відносно ОЩР і КФ. Очевидно, при L = 1 виходить реалізація ВП із КФ, тотожно рівна нулю. Рекомендується вибирати величину L такою, щоб виконувалося $M \le L << N$.

До задачі мінімізації функціонала (2) можна додати обмеження $|x_{n-1} - x_n| < h$, де h – величина, яка обмежує розкид сусідніх відліків ВП, що дозволяє одержувати більш гладкі реалізації. Виконання нерівності розуміється у імовірнісному змісті. Величина h може бути визначена експериментально.

Метод реалізований у виді програми у середовищі С++ і пройшов експериментальну перевірку на ПЕОМ для різних f(x) і R(τ). Помилка моделювання $\sigma_{\text{ош}}$ розраховується за формулою

$$\sigma_{\text{ош}} = \frac{1}{R[0]}\left[\frac{1}{M}\sum_{h=1}^{M^{(n)}}\left(R[h] - \hat{R}^{(N)}[k]\right)\right]^{1/2}.$$

З використання даного підходу розроблені робочі алгоритми моделювання векторних стаціонарних ВП $X(t) = \|x_1(t), \ldots, x_k(t)\|^T$, заданих вектором одномірних щільностей розподілу $f(x) = \|f_1(x), \ldots, f_k(x)\|^T$ і кореляційною матрицею $\|R_{ij}(\tau)\|_{j=1,\ldots,k}^{i=1,\ldots,k}$ і скалярних однорідних двовимірних полів $\{x(s, t),\ 0 \le s \le S,\ 0 \le t \le T\}$, заданих ОЩР та КФ $R(u, v) = M[x(s, t) \times x(s + u, t + v)]$. Алгоритми реалізовані у виді програм і пройшли експериментальну оцінку.

3. Синтез сукупністю реалізацій

Нехай ВП $\{X(t), 0 \le t \le T\}$ заданий ОЩР f(x, t) і КФ R(s, t) і обраний крок дискретизації параметра $\Delta t = T/N$. Будемо моделювати L реалізацій одночасно. Через $x_n^{(i)}$ позначимо n-й відлік у і-й реалізації. Послідовно виконаємо N кроків.

Формально на кожнім кроці n відліки $x_n^{(i)}$ визначимо у вигляді

$$x_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{L} C_{ij}^{(n)} \xi_j^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, L,$$

де $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_L^{(n)}$ – вибірка незалежних випадкових чисел із щільністю f(x, n, Δt), а $C_{ij}^{(n)}$ визначаються з рішення задачі цілочисельного програмування:

$$\min_{C_{ij}^{(n)}} \Phi^{(n)}\left(R, \hat{R}^{(n)}\right); \ \sum_j C_{ij}^{(n)} = 1; \ \sum_i C_{ij}^{(n)} = 1;$$

$$C_{ij}^{(n)} \in \{0,\ 1\}; \ i, j = 1, \ldots, L, \qquad (3)$$

де R – задана КФ; $\hat{R}^{(n)}$ – оцінка КФ.

У залежності від того, як визначається КФ – за реалізацією:

$$\hat{R}_i^{(n)}[k] = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\left(x_j^{(i)} - m\right)\left(x_{j+k}^{(i)} - m\right);$$

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx = m_t = \text{const},$$

або за ансамблем:

$$\hat{R}[n-k, n] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(x_{n-k}^{(i)} - m_{n-k}\right)\left(x_n^{(i)} - m_n\right),$$

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, i\Delta t) dx,$$

функціонал у (3) можна записати відповідно як

$$\Phi^{(n)} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{M^n}\left(R[k] - \hat{R}_i^{(n)}[k]\right)^2, \ (R(s, t) = R(t\text{-}s)), \qquad (4)$$

або $$\Phi^{(n)} = \sum_{k=1}^{M^{(n)}}\left(R[n-k, n] - \hat{R}[n-k, n]\right)^2, \qquad (5)$$

де $M^{(n)} = \begin{cases} n-1, & \text{якщо } n \le M; \\ M, & \text{якщо } n > M, \end{cases}$ M – задане число відліків КФ на інтервалі кореляції.

Під рішенням задачі (3) розуміємо таке рішення, що забезпечує представлення оцінки КФ у вигляді $\hat{R}^{(n)} = R + \delta_n$, де δ_n – випадкова величина з $M[\delta_n] = 0$ і $D[\delta_n] = \delta_n^2 < \infty$.

На першому кроці можна покласти $C_{ij}^{(1)} = 1$, якщо i = j та $C_{ij}^{(1)} = 0$, якщо $i \ne j$. Модульований ВП за побудовою є СЕ відносно ОЩР, або СС-СЕ відносно КФ, якщо береться (4), або СЕ, якщо береться (5).

Висновки

Запропоновано комбінаторний метод моделювання випадкових процесів, які не мають гаусівського або субгаусівського характеру. Метод дозволяє провести моделювання за однією або невеликою сукупністю реалізацій. **Напрям подальших досліджень** – розробка алгоритмів для моделювання нестаціонарних випадкових процесів.

Список літератури

1. *Михайлов Г.А. Численное статистеское моделирование / Г.А. Михайлов, А.В. Войтишек. – М.: Академия, 2006. – 368 с.*
2. *Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах / Ю.Г. Поляк. – М.: Сов. радио, 1971. – 400 с.*
3. *Козаченко Ю.В. Моделювання випадкових процесів / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко, І.В. Розора. – К.: ВПЦ «Задруга», 2007. – 230 с.*

Надійшла 23.02.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, ДП «Центральний НДІ навігації і управління», Київ.

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В.В. Косенко, А.В. Шевченко

В статье предложен комбинаторный метод моделирования случайных процессов, которые не имеют гауссовского или субгауссовского характера и должны быть реализованные по одной или небольшой совокупности реализаций.

Ключевые слова: *случайный процесс, эргодичность, синтез, нестационарность.*

COMBINATIVE METHOD OF DESIGN OF STOCHASTIC PROCESSES

V.V. Kosenko, A.V. Shevchenko

The combinative method of design of stochastic processes which do not have Gaussian or to subgaussian character and must be realized after one or by the small aggregate of realization is offered in the article.

Keywords: *casual process, ergodicity, synthesis, unstationarity.*