УДК 006.91

И.П. Захаров, Е.А. Климова

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕБОРА ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КОСВЕННЫХ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрено применение метода перебора при обработке косвенных некоррелированных измерений с разным числом наблюдений входных величин. Получены выражения для оценок результата измерений, а также суммарной стандартной и расширенной неопределенностей.

Ключевые слова: *метод перебора, косвенные некоррелированные измерения, неопределенность измерения.*

Введение

Повышение достоверности оценивания результатов и неопределенности измерений является актуальной задачей метрологии. Для решения этой задачи разрабатываются новые методы обработки данных и совершенствуются уже известные [1, 2]. В статье [3] было изложено применение метода перебора данных для оценивания результата и неопределенности косвенных некоррелированных измерений. Показано, что метод перебора дает несмещенную оценку измеряемой величины и максимально надежную оценку ее неопределенности типа А не нуждаясь в предположениях о форме распределений данных измерений входных величин или в построении этих распределений, не используя разложение Тейлора.

При выводе формулы суммарной стандартной неопределенности типа А в работе [3], авторы ограничились простейшим случаем, когда количество наблюдений всех входных величин одинаково. Кроме того, в работе не был рассмотрен вопрос оценивания суммарной стандартной неопределенности типа В и вычисления расширенной неоределенности с ее учетом.

Целью настоящей статьи является распространение метода перебора на косвенные некоррелированные измерения с различным числом наблюдений входных величин и с оцениванием всех видов неопределенностей, включая расширенную.

Метод перебора данных

Суть метода перебора данных заключается в получении всех возможных значений измеряемой величины y_i, получаемых при переборе всех значений входных величин, подставляемых в уравнение измерения:

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{mi}) . \qquad (1)$$

Для двух входных величин с числом измерений n_1 и n_2 процесс получения массива y_i можно представить в виде табл. 1.

Таблица 1

Реализация метода перебора для двух входных величин

	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n_2}
x_{11}	$f(x_{11}, x_{21})$	$f(x_{11}, x_{22})$	…	$f(x_{11}, x_{2n_2})$
x_{12}	$f(x_{12}, x_{21})$	$f(x_{12}, x_{22})$	…	$f(x_{12}, x_{2n_2})$
…	…	…	…	…
x_{1n_1}	$f(x_{1n_1}, x_{21})$	$f(x_{1n_1}, x_{22})$	…	$f(x_{1n_1}, x_{2n_2})$

Количество получаемых таким образом значений y_i определяется как произведение $n_1 n_2$.

Очевидно, что при m входных величинах процесс получения массива возможных значений измеряемой величины y_i будет выглядеть в виде m-мерной таблицы с общим количеством ячеек

$$N = \prod_{i=1}^{m} n_i . \qquad (2)$$

По полученному массиву измеряемой величины можно получить результат измерения

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \qquad (3)$$

и дисперсию оценок измеряемой величины y_i

$$s^2(y_i) = \frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2 . \qquad (4)$$

Поскольку результат измерения и оценка дисперсии получены по N оценкам измеряемой величины y_i, они существенно более надежны, чем оценки, полученные при применении традиционного метода [3].

Расчет эквивалентного числа наблюдений

Для перехода от дисперсии отдельных наблюдений к стандартной неопределенности типа А, необходимо определить эквивалентное число наблюдений n_{eq}, характеризующих неопределенность измеряемой величины. Использование для этой цели общего количества вариантов перебора N неправомочно, поскольку оно не характеризует число реально проведенных результатов измерений, и его использование приведет к занижению оценки неопределенности.

Для решения этой задачи в общем виде для m входных величин осуществим разложение функции (1) в ряд Тейлора по степеням случайных погрешностей Δ_i входных величин и ограничимся первыми членами разложения:

$$\Delta_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta_{ji} = \sum_{j=1}^{m} c_j \Delta_{ji}, \qquad (5)$$

где Δ_{y_i} – случайная погрешность определения y_i; c_j – коэффициент чувствительности.

Находя дисперсию правой и левой части этого равенства, получаем следующее уравнение

$$s^2(y_i) = \sum_{j=1}^{m} c_j^2 s^2(x_{ji}), \qquad (6)$$

которое можно переписать, выражая $s(y_i)$ и $s(x_{ji})$ через неопределенности типа А входных и выходных величин в следующем виде:

$$u_A^2(y) \cdot n_{eq} = \sum_{j=1}^{m} c_j^2 u_A^2(x_j) \cdot n_j, \qquad (7)$$

где n_j – количество многократных наблюдений, которое было проведено при измерении j-й входной величины.

Отсюда:

$$n_{eq} = \frac{1}{u_A^2(y)} \sum_{j=1}^{m} n_j c_j^2 u_A^2(x_j), \qquad (8)$$

а поскольку из закона распространения неопределенности [2]

$$u_A^2(y) = \sum_{j=1}^{m} c_j^2 u_A^2(x_j), \qquad (9)$$

то окончательно выражение для эффективного числа степеней свободы при использовании метода перебора примет вид:

$$n_{eq} = \frac{\sum_{j=1}^{m} n_j c_j^2 u_A^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 u_A^2(x_j)}. \qquad (10)$$

Для двух входных величин эта формула будет иметь вид:

$$n_{eq} = \frac{n_1 c_1^2 u_A^2(x_1) + n_2 c_2^2 u_A^2(x_2)}{c_1^2 u_A^2(x_1) + c_2^2 u_A^2(x_2)} = \frac{n_1 w_{1,2}^2 + n_2}{w_{1,2}^2 + 1}, \qquad (11)$$

где $w_{1,2} = \frac{c_1 u_A(x_1)}{c_2 u_A(x_2)}$ – отношение вкладов неопределенности первой и второй входных величин в неопределенность измеряемой величины.

Зависимость n_{eq} от $w_{1,2}$, n_1 и n_2 приведена на рис. 1, из которого видно, что при любых $w_{1,2}$, значение n_{eq} находится между n_1 и n_2, и принимает значение $n_{eq} = n$ при $n_1 = n_2 = n$.

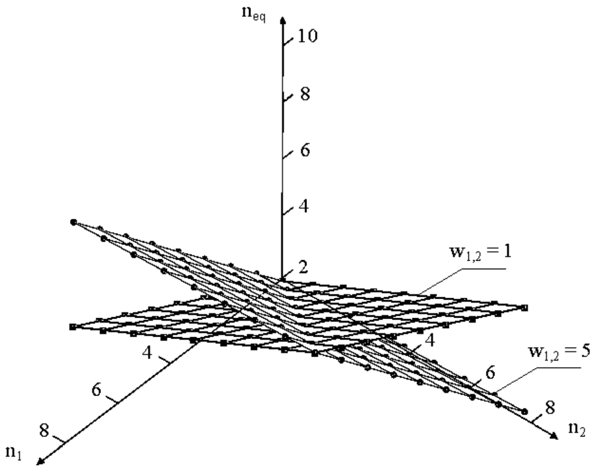

Рис. 1. Зависимость эквивалентного числа измерений от отношения вкладов входных величин и числа их наблюдений

Зная n_{eq}, можно найти суммарную стандартную неопределенность типа А по формуле:

$$u_A(y) = \frac{s(y_i)}{\sqrt{n_{eq}}} = \sqrt{\frac{1}{n_{eq} \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}, \qquad (12)$$

Для равного числа наблюдений всех входных величин $n_i = n$, имеем $n_{eq} = n$ и выражение (12) переходит в выражение, приведенное в работе [1]:

$$u_A(y) = s(y_i) / \sqrt{n}; \qquad (13)$$

Расширенную неопределенность типа А можно определить по формуле:

$$U_A(y) = t_{0,95}(n_{eq} - 1) \cdot u_A(y), \qquad (14)$$

где $t_{0,95}(n_{eq} - 1)$ – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы $(n_{eq} - 1)$.

Корреляция данных, полученных методом перебора

При обработке данных методом перебора возникает вопрос, не будет ли влиять на оценку неопределенности измерений мнимая корреляция, которая имеет место при ограниченном числе наблюдений между двумя наборами данных. Действительно, известно неравенство Стьюдента [1], определяющее существенность значения коэффициента корреляции

$$\frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \ge t_s, \qquad (15)$$

где t_s − коэффициент Стьюдента для заданной вероятности p и числа степеней свободы $\nu=(n-2)$.

Из этого выражения можно получить зависимость максимального значения коэффициента мнимой корреляции, которая может присутствовать для двух наборов некоррелированных данных с одинаковым числом наблюдений n:

$$|r_{max}| \ge \frac{1}{\sqrt{\frac{n-2}{t_s^2}+1}}. \qquad (16)$$

Эта зависимость приведена на рис. 2, из которого видно, что для p=0,95 даже при n=15, абсолютное значение r может достигать 0,5.

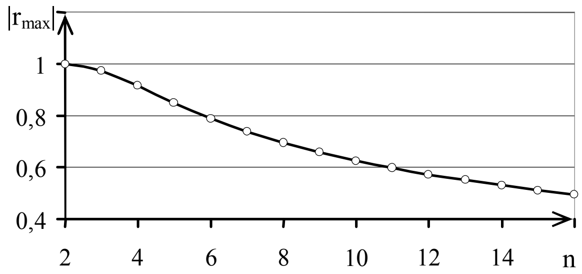

Рис. 2. Зависимость $|r_{max}|$ от числа измерений

Поскольку при перестановке данных в любом из наборов мнимая корреляция будет оставаться (будет изменяться только коэффициент корреляции), то это может существенно повлиять на оценку неопределенности измерения при реализации метода перебора.

Для доказательства отсутствия корреляции между данными, взятыми для метода перебора, возьмем независимо полученные результаты измерения двух аргументов: $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}$; $x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}$. Тогда корреляционный момент для всех данных, использованных при реализации метода перебора, будет определяться по формуле:

$$K=\left(n^2-1\right)^{-1}\times$$
$$\times[(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{21}-\bar{x}_2)+$$
$$+...+(x_{1n}-\bar{x}_1)(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{22}-\bar{x}_2)+$$
$$+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{22}-\bar{x}_2)+...+(x_{1n}-\bar{x}_1)(x_{22}-\bar{x}_2)+$$
$$+...+$$
$$+(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{2n}-\bar{x}_2)+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{2n}-\bar{x}_2)+...+$$
$$+(x_{1n}-\bar{x}_1)(x_{2n}-\bar{x}_2)].$$

Легко видеть, что это выражение можно преобразовать в следующее:

$$K=\left(n^2-1\right)^{-1}\times\{(x_{21}-\bar{x}_2)\times$$
$$\times[(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{12}-\bar{x}_1)+...++(x_{1n}-\bar{x}_1)]+$$
$$+(x_{22}-\bar{x}_2)[(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{12}-\bar{x}_1)+...+(x_{1n}-\bar{x}_1)]+$$
$$+...+$$
$$+(x_{2n}-\bar{x}_2)[(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{12}-\bar{x}_1)+...+(x_{1n}-\bar{x}_1)]\},$$

откуда можно получить окончательно:

$$K=\left(n^2-1\right)^{-1}\times$$
$$\times[(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{22}-\bar{x}_2)+...+(x_{2n}-\bar{x}_2)]\times$$
$$\times[(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{12}-\bar{x}_1)+...+(x_{1n}-\bar{x}_1)].$$

Как можно видеть из последнего выражения, и первый и второй сомножители его правой части представляют собой сумму отклонений результатов наблюдений каждой входной величины от их средних значений и, следовательно, каждый из них равен нулю, т.е. корреляционный момент (и коэффициент корреляции) для данных, взятых для реализации метода перебора, будет также равен нулю.

Оценивание расширенной неопределенности

Оценивание расширенной неопределенности для данных, полученных методом перебора, можно производить с помощью нескольких подходов.

Первый подход соответствует базовому алгоритму оценивания неопределенности [4]. Для нахождения суммарной стандартной неопределенности типа В следует воспользоваться законом распространения неопределенности:

$$u_B^2(y)=\sum_{j=1}^{m}c_j^2 u_B^2(x_j), \qquad (17)$$

где коэффициенты чувствительности $c_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}$, а $u_B(x_j)$ − стандартные неопределенности типа В входных величин.

Тогда суммарная стандартная неопределенность косвенных некоррелированных измерений будет равна:

$$u_c(y)=\sqrt{u_A^2(y)+u_B^2(y)}, \qquad (18)$$

а расширенная неопределенность определиться выражением:

$$U(y)=t_{0,95}(\nu_{eff})\cdot u_c(y), \qquad (19)$$

где $t_{0,95}(\nu_{eff})$ − коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и эффективного числа степеней свободы, определяемого по формуле Велча-Саттерсвейта, которая для данного случая будет иметь вид:

$$\nu_{eff}=(n_{eq}-1)\left[\frac{u_c(y)}{u_A(y)}\right]^4. \qquad (20).$$

Поскольку ν_{eff}, как и n_{eq}, может быть дробным, значения коэффициента Стьюдента $t_{0,95}(\nu_{eff})$ рекомендуется определять по таблице, приведенной в статье [5].

Второй подход состоит в получении оценки расширенной неопределенности типа А по формуле (14), расчете расширенной неопределенности типа В в соответствии с выражением:

$$U_B(y) = k_B u_B^2(y), \quad (21)$$

где k_B − коэффициент охвата для неопределенности типа В, определяемый через композицию законов распределения вкладов неопределенности типа В [6], и применении выражения для расширенной неопределенности результата измерения, взятого из теории погрешности [1]:

$$U(y) = \frac{U_A(y) + U_B(y)}{u_A(y) + u_B(y)} \sqrt{u_A^2(y) + u_B^2(y)}. \quad (22)$$

Третий подход заключается в использовании закона распространения расширенной неопределенности, описанного в работе [7]:

$$U_c(y) = \sqrt{U_A^2(y) + U_B^2(y)}. \quad (23)$$

Целесообразность применения того или иного подхода должна быть определена для конкретных условий их применения (модельное уравнение, число результатов наблюдений каждого аргумента и т.д.).

Выводы

1. Использование метода перебора повышает надежность результата косвенных некоррелированных измерений и достоверность оценки его неопределенности.

2. Получена формула для расчета эквивалентного числа измерений при разных количествах наблюдений входных величин, анализ которой показал, что при любых соотношениях между вкладами неопределенности, значение n_{eq} находится между минимальным и максимальным количеством наблюдений входных величин.

3. Доказано отсутствие корреляции между результатами наблюдений входных величин при использовании метода перебора, что делает возможным его применение для обработки результатов косвенных некоррелированных измерений.

4. Предложены различные способы оценивания расширенной неопределенности измерений на основе результатов, полученных методом перебора.

Список литературы

1. Rabinovich S.G. Evaluating measurement accuracy: a practical approach / S.G. Rabinovich. – New York: Springer. 2010. – 271 p.

2. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" − Propagation of distributions using a Monte Carlo method. − BIPM, 2008. − 88 p.

3. Захаров И.П. Сравнительный анализ методов обработки экспериментальных данных при косвенных некоррелированных измерениях / И.П. Захаров, С.Г. Рабинович // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 1 (91). – С. 33 – 37.

4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.

5. Захаров И.П. Расчет значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы / И.П. Захаров, Е.А. Климова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2010. – Вип. 4 (85). – С. 43 – 47.

6. Захаров И.П. Расчет коэффициента охвата для нормально и равномерно распределенных составляющих неопределенности / И.П. Захаров // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2005. – Вип. 6. – С. 52 – 57.

7. Захаров И.П. Методика оценивания неопределенности при выполнении метрологических работ / И.П. Захаров, М.П. Сергиенко, О.Н. Величко, В.Н. Чепела // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2006. – Вип. 7. – С. 32-36.

Поступила в редколлегию 11.04.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПЕРЕБОРУ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ НЕПРЯМИХ НЕКОРЕЛЬОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ

І.П. Захаров, К.А. Клімова

Розглянуто застосування методу перебору при опрацюванні непрямих некорельованих вимірювань з різною кількістю спостережень вхідних величин. Отримані вирази для оцінок результату вимірювання, а також суммарної стандартної та розширеної невизначеностей.

Ключові слова: *метод перебору, непрямі некорельовані вимірювання, невизначеність вимірювань.*

APPLICATION OF ENUMERATIVE TECHNIQUE FOR EVALUATING OF UNCERTAINTIES IN INDIRECT UNCORRELATED MEASUREMENTS

I.P. Zakharov, K.A. Klimova

The application of enumerative technique in the processing of indirect uncorrelated measurements with different numbers of observation results was considered. Expressions for the estimation of measurements, as well as combined standard and expanded uncertainties were obtained.

Keywords: *enumerative technique, indirect uncorrelated measurements, uncertainty in measurement.*