

УДК 519.21

С.В. Кадигроб¹, Т.И. Каткова²¹ Коммунальное предприятие Производственно-технологическое предприятие «Вода»² Бердянский университет менеджмента и бизнеса**НЕЧЕТКИЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ**

Предложена методика анализа процесса функционирования сложной системы, моделью которой является полумарковский процесс с нечетко заданными параметрами. Получен набор финальных вероятностей состояний системы, содержащий требуемую информацию об эффективности функционирования.

Ключевые слова: система, безотказность, условия эксплуатации, расход ресурса, интенсивность отказов.

Введение

Современное представление о характере процессов функционирования сложных систем свидетельствует о недостаточной адекватности широко и традиционно используемых марковских их описаний. Неэкспоненциальность и нестационарность процессов пребывания систем в возможных своих состояниях и процессов переходов предопределяют целесообразность применения в задачах анализа и синтеза реальных систем более гибкого математического аппарата – теорию полумарковских процессов (ПМП). Технологии решения таких задач в условиях ПМП хорошо отработаны и эффективны [1, 2]. Однако, на практике достаточно часто возникают ситуации, когда по объективным причинам аналитические описания основных элементов полумарковских моделей (матрица условных функций распределения продолжительностей пребывания в возможных своих состояниях до ухода и матрица переходных вероятностей марковской цепи, вложенной в ПМП) не могут быть получены точно. При этом наименее требовательным является представление этих элементов ПМП средствами теории нечетких множеств. Сформулируем задачу анализа системы, изменение состояний которой управляется полумарковским процессом с нечетко определенными параметрами.

Постановка задачи

Система задана множеством состояний $\mathring{A} = \{ \mathring{A}_1, \mathring{A}_2, \dots, \mathring{A}_i \}$ и множеством возможных ее переходов из одних состояний в другие. Определим ПМП в этой системе матрицей условных функций распределения $F(t) = (F_{ij}(t))$, $i, j \in E$, продолжительностей пребывания в каждом состоянии до ухода из него и матрицей $P = (P_{ij})$ переходных вероятностей вложенной марковской цепи (ВМЦ). Тогда, как известно [1, 2], асимптотическое поведение ПМП описывается вектором финальных вероятностей состояний системы, компоненты которого рассчитываются по формуле

$$V_i = \frac{\pi_i T_i}{\sum_{i \in E} \pi_i T_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где π_i – компонента стационарного распределения вероятностей состояний ВМЦ, определяющая вероятность i -го состояния, $i \in E$, T_i – средняя продолжительность пребывания ПМП в состоянии i до ухода из этого состояния, $i \in E$.

При этом стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i)$ состояний ВМЦ отыскивается с использованием матрицы переходных вероятностей P в результате решения системы уравнений

$$\pi = \pi D, \quad (2)$$

дополненной условием нормировки

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1, \quad (3)$$

а средняя продолжительность пребывания в E_i до ухода определяется соотношением

$$T_i = \sum_{j \in E, j \neq i} P_{ij} \int_0^{\infty} (1 - F_{ij}(t)) dt, i \in E. \quad (4)$$

Будем теперь считать, что аналитические описания условных функций распределения $F_{ij}(t)$ продолжительности пребывания в каждом из состояний до ухода содержат нечеткий параметр θ . При этом, естественно, определяемое распределением $F_{ij}(t, \theta)$

для фиксированного t значение вероятности того, что случайная продолжительность пребывания в E_i до ухода в \mathring{A}_j будет меньше t , становится нечетким числом, функция принадлежности которого определяется функцией принадлежности нечеткого параметра θ .

Пусть, например, продолжительности пребывания системы в E_i до ухода в E_j распределены экспоненциально, т.е. $F_{ij}(t) = 1 - \mathring{a}^{-\lambda_{ij}t}$, $t > 0$, $(i, j) \in \mathring{A}$ причем параметры λ_{ij} – нечеткие числа с функциями принадлежности

$$Z_1^{(0)} = \pi_1 (D_{11}^{(0)} - 1) + \pi_2 D_{21}^{(0)} + \dots + \pi_i D_{i1}^{(0)},$$

$$Z_2^{(0)} = \pi_1 (D_{12}^{(0)} - 1) + \pi_2 D_{22}^{(0)} + \dots + \pi_i D_{i2}^{(0)},$$

.....

$$Z_{i-1}^{(0)} = \pi_1 D_{1,i-1}^{(0)} + \pi_2 D_{2,i-1}^{(0)} + \dots + \pi_i D_{i,i-1}^{(0)}.$$

Понятно что компактность и конфигурация функций принадлежности $\mu(Z_1), \mu(Z_2), \dots, \mu(Z_{i-1})$ также определяется набором $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i)$. Теперь можно поставить задачу отыскания четкого решения нечеткой системы уравнений (10). К этому решению можно предъявить некоторые естественные требования. Во-первых, искомый набор $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_i^*)$ должен минимально отличаться от набора $(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \dots, \pi_i^{(0)})$, т.е. модальные значения $Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, \dots, Z_{i-1}^{(0)}$ должны быть максимально близки к нулю. Во-вторых, желательно, чтобы тела неопределенности, задаваемые функциями принадлежности $\mu(Z_1, \bar{I}^*), \mu(Z_2, \bar{I}^*), \dots, \mu(Z_{i-1}, \bar{I}^*)$, были максимально компактными (наименее размытыми). Поясним сказанное.

Пусть нечеткие числа (P_{ij}) заданы функциями принадлежности (L-R) – типа [4], то есть

$$\mu(P_{ij}) = \begin{cases} L\left(\frac{P_{ij}^{(0)} - P_{ij}}{\alpha_{ij}}\right), & P_{ij} \leq P_{ij}^{(0)}, \\ R\left(\frac{P_{ij} - P_{ij}^{(0)}}{\beta_{ij}}\right), & P_{ij} > P_{ij}^{(0)}, \end{cases} \quad (12)$$

α_{ij}, β_{ij} - левый и правый коэффициенты нечеткости.

Если в качестве L и R –функций выбрать гауссовы, то (12) имеет вид

$$\mu(P_{ij}) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{(P_{ij}^{(0)} - P_{ij})^2}{2\alpha_{ij}}\right\}, & P_{ij} \leq P_{ij}^{(0)}, \\ \exp\left\{-\frac{(P_{ij} - P_{ij}^{(0)})^2}{2\beta_{ij}}\right\}, & P_{ij} > P_{ij}^{(0)}. \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что соотношение (13) может быть записано компактнее:

$$\mu_{ij}(P_{ij}) = \exp\left\{-\frac{(P_{ij} - P_{ij}^{(0)})^2}{2D_{ij}} \left(1 + r_{ij} \text{Sign}\left(P_{ij} - P_{ij}^{(0)}\right)\right)\right\}. \quad (14)$$

Неизвестные параметры D_{ij} и r_{ij} легко определяются через заданные значения α_{ij} и β_{ij} . Запишем (14) следующим образом:

$$\mu(P_{ij}) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{(P_{ij}^{(0)} - P_{ij})^2}{2\frac{D_{ij}}{1-r_{ij}}}\right\}, & P_{ij} \leq P_{ij}^{(0)}, \\ \exp\left\{-\frac{(P_{ij} - P_{ij}^{(0)})^2}{2\frac{D_{ij}}{1+r_{ij}}}\right\}, & P_{ij} > P_{ij}^{(0)}. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{D_{ij}}{1-r_{ij}} = \alpha_{ij}, \quad \frac{D_{ij}}{1+r_{ij}} = \beta_{ij},$$

откуда

$$\frac{1+r_{ij}}{1-r_{ij}} = \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}, \quad r_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - \beta_{ij}}{\alpha_{ij} + \beta_{ij}},$$

$$D_{ij} = \alpha_{ij}(1-r_{ij}) = \beta_{ij}(1+r_{ij}) = \frac{2\alpha_{ij}\beta_{ij}}{\alpha_{ij} + \beta_{ij}}.$$

Теперь, с учетом (11) и (13), запишем функции принадлежности нечетких чисел

$$\mu(Z_i) = \mu\left(\sum_{j \neq i} \pi_j D_{ij} + \pi_i (P_{ii} - 1)\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Z_i - \bar{Z}_i)^2}{\alpha_i}\right\}, & Z_i \leq \bar{Z}_i, \\ \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Z_i - \bar{Z}_i)^2}{\beta_i}\right\}, & Z_i > \bar{Z}_i, \end{cases}$$

$$\bar{Z}_i = \sum_{j \neq i} \pi_j D_{ij}^{(0)} + \pi_i (P_{ii}^{(0)} - 1),$$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n \pi_j^2 \alpha_{ij}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^n \pi_j^2 \beta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

В качестве показателя компактности тела неопределенности, задаваемого функцией принадлежности, естественно использовать площадь под соответствующей кривой, то есть

$$S_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(Z_i) dZ_i = \int_{-\infty}^{Z_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Z_i - \bar{Z}_i)^2}{\alpha_i}\right\} dZ_i + \int_{Z_i}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Z_i - \bar{Z}_i)^2}{\beta_i}\right\} dZ_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_i}).$$

Тогда комплексный критерий оптимальности набора $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_i^*)$ имеет вид

$$I(\pi^*) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_i^2 (\pi^*) + \beta_i^2 (\pi^*) \right) + \left(\pi^* - \pi^{(0)} \right) \left(\pi^* - \pi^{(0)} \right)^T. \quad (15)$$

Таким образом задача отыскания стационарно-го распределения вероятностей состояний ВМЦ, сведена к задаче математического программирования: найти набор $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_i^*)$, минимизирующий (15) и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i=1}^n \pi_i^* = 1, \quad \pi_i^* \geq 0. \quad (16)$$

Пусть этот набор найден. Тогда с его использованием, с учетом (1), (4), может быть рассчитан вектор финальных вероятностей состояний ПМП. В случае необходимости комплексный критерий (15) может быть модифицирован за счет ввода весовых коэффициентов, учитывающих возможные различия в уровнях требований к разным компонентам критерия.

Заметим, наконец, что в качестве альтернативного критерия компактности тел неопределенности для функций принадлежности $\mu_i(Z_i), i = 1, 2, \dots, n-1$, может быть выбрана суммарная длина носителей соответствующих им множеств γ -уровня, которая равна

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\gamma), \quad R_i(\gamma) = \{Z_i : \mu(Z_i) \geq \gamma\}.$$

Однако, это никак не облегчает задачу (15), (16), поскольку, как легко показать, аналитическое

выражение для расчета $R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\gamma)$ повторяет вы-

ражение для $S = \sum_{i=1}^{n-1} S_i$ с весовым коэффициентом, зависящим от γ .

Выводы

Рассмотрена задача анализа системы, изменение состояний которой управляется полумарковским процессом с нечетко заданными параметрами. Рассмотрены ситуации, когда нечеткими являются параметры условных функций распределения пребывания системы в каждом из возможных состояний до ухода, а также вероятности переходов для марковской цепи, вложенной в полумарковский процесс. Получены соотношения для расчета финального распределения состояний системы.

Список литературы

1. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 182 с.
2. Тихонов В.Н. Марковские процессы / В.Н. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. Zadeh L. Fuzzy Sets / L. Zadeh // Information and Control. – 1965. – vol.8(3). – P. 338-353.
4. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике: Пер. с франц. / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: Радио и связь, 1982. – 486 с.
5. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 486 с.
6. Раскин Л.Г. Нечеткая математика / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.
7. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко Н.Н., 2010. – 512 с.

Поступила в редколлегию 1.04.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

НЕЧІТКІ НАПІВМАРКІВСЬКІ МОДЕЛІ СИСТЕМ

С.В. Кадигроб, Т.І. Каткова

Запропонована методика аналізу процесу функціонування складної системи, моделю якої є напівмарківський процес з нечітко заданими параметрами. Отриманий набір фінальної вірогідності станів системи, що містить необхідну інформацію про ефективність функціонування.

Ключові слова: система, безвідмовність, умови експлуатації, витрата ресурсу, інтенсивність відмов.

FUZZY SEMI - MARKOV MODELS OF THE SYSTEMS

S.V. Kadigrob, T.I. Katkova

The method of analysis of functioning process of the difficult system the model of which is a semi - Markov process with fuzzy parameters is offered. The set of final probabilities of the states of the system, containing the required information about efficiency of functioning, is got.

Keywords: system, faultlessness, external environments, expense of resource, intensity of refuses.