УДК 519.21

С.В. Кадигроб[1], Т.И. Каткова[2]

[1] *Коммунальное предприятие Производственно-технологическое предприятие «Вода»*
[2] *Бердянский университет менеджмента и бизнеса*

НЕЧЕТКИЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ

Предложена методика анализа процесса функционирования сложной системы, моделью которой является полумарковский процесс с нечетко заданными параметрами. Получен набор финальных вероятностей состояний системы, содержащий требуемую информацию об эффективности функционирования.

Ключевые слова: *система, безотказность, условия эксплуатации, расход ресурса, интенсивность отказов.*

Введение

Современное представление о характере процессов функционирования сложных систем свидетельствует о недостаточной адекватности широко и традиционно используемых марковских их описаний. Неэкспоненциальность и нестационарность процессов пребывания систем в возможных своих состояниях и процессов переходов предопределяют целесообразность применения в задачах анализа и синтеза реальных систем более гибкого математического аппарата – теорию полумарковских процессов (ПМП). Технологии решения таких задач в условиях ПМП хорошо отработаны и эффективны [1, 2]. Однако, на практике достаточно часто возникают ситуации, когда по объективным причинам аналитические описания основных элементов полумарковских моделей (матрица условных функций распределения продолжительностей пребывания в возможных своих состояниях до ухода и матрица переходных вероятностей марковской цепи, вложенной в ПМП) не могут быть получены точно. При этом наименее требовательным является представление этих элементов ПМП средствами теории нечетких множеств. Сформулируем задачу анализа системы, изменение состояний которой управляется полумарковским процессом с нечетко определенными параметрами.

Постановка задачи

Система задана множеством состояний $Å = \left\{Å_1, Å_2, .., Å_ï\right\}$ и множеством возможных ее переходов из одних состояний в другие. Определим ПМП в этой системе матрицей условных функций распределения $F(t) = \left(F_{ij}(t)\right)$, $i, j \in E$, продолжительностей пребывания в каждом состоянии до ухода из него и матрицей $P = \left(P_{ij}\right)$ переходных вероятностей вложенной марковской цепи (ВМЦ). Тогда, как известно [1, 2], асимптотическое поведение ПМП описывается вектором финальных вероятностей состояний системы, компоненты которого рассчитываются по формуле

$$V_i = \frac{\pi_i T_i}{\sum\limits_{i \in E} \pi_i T_i}, i = 1, 2, .., n, \tag{1}$$

где π_i - компонента стационарного распределения вероятностей состояний ВМЦ, определяющая вероятность i-го состояния, $i \in E$, T_i - средняя продолжительность пребывания ПМП в состоянии i до ухода из этого состояния, $i \in E$.

При этом стационарное распределение $\pi = \left(\pi_1, \pi_2, .., \pi_ï\right)$ состояний ВМЦ отыскивается с использованием матрицы переходных вероятностей P в результате решения системы уравнений

$$\pi = \pi Ð, \tag{2}$$

дополненной условием нормировки

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1, \tag{3}$$

а средняя продолжительность пребывания в E_i до ухода определяется соотношением

$$T_i = \sum_{j \in E, j \neq i} P_{ij} \int_0^\infty \left(1 - F_{ij}(t)\right) dt, \ i \in E. \tag{4}$$

Будем теперь считать, что аналитические описания условных функций распределения $F_{ij}(t)$ продолжительности пребывания в каждом из состояний до ухода содержат нечеткий параметр θ. При этом, естественно, определяемое распределением $F_{ij}(t, \theta)$ для фиксированного t значение вероятности того, что случайная продолжительность пребывания в E_i до ухода в $Å_j$ будет меньше t, становится нечетким числом, функция принадлежности которого определяется функцией принадлежности нечеткого параметра θ.

Пусть, например, продолжительности пребывания системы в E_i до ухода в E_j распределены экспоненциально, т.е. $F_{ij}(t) = 1 - å^{-\lambda_{ij} t}$, t>0, $(i, j) \in Å$ причем параметры λ_{ij} – нечеткие числа с функциями принадлежности

$$\mu_\lambda\left(\lambda_{ij}\right)=\begin{cases}1, & \lambda_{ij}\in\left[a_{ij},b_{ij}\right] \ ,\\ 0, & \lambda_{ij}\notin\left[a_{ij},b_{ij}\right] \ .\end{cases} \qquad (5)$$

При этом нечеткое значение условного среднего значения продолжительности T_{ij} пребывания в $Å_i$ до ухода в $Å_j$ равно

$$T_{ij}=\int_0^\infty\left(1-F_{ij}(t)\right)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda_{ij}t}dt=\frac{1}{\lambda_{ij}}. \qquad (6)$$

Найдем функцию принадлежности нечеткого числа T_{ij}. В соответствии с принципом обобщения Л.Заде [3-6] функция принадлежности результата выполнения операции $z=f(x)$ над нечетким числом x с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{o}}(\tilde{o})$ имеет вид $\mu_{\tilde{o}}\left(f^{-1}(z)\right)$. Тогда, имея в виду (5), (6), получим

$$\mu\left(T_{ij}\right)=\mu_\lambda\left(\frac{1}{T_{ij}}\right)=\begin{cases}1, & T_{ij}^{-1}\in\left[a_{ij},b_{ij}\right] \ ,\\ 0, & T_{ij}^{-1}\notin\left[a_{ij},b_{ij}\right] \ .\end{cases}$$

Отсюда

$$\mu\left(T_{ij}\right)==\begin{cases}1, T_{ij}\in\left[1/b_{ij}\,,1/a_{ij}\right],\\ 0, T_{ij}\notin\left[1/b_{ij}\,,1/a_{ij}\right].\end{cases} \qquad (7)$$

В нечеткой математике отсутствует понятие «математическое ожидание», взамен которого введено понятие «ожидаемое значение». Расчет ожидаемого значения нечеткого числа x с носителем [c,d] и функцией принадлежности $\mu(\tilde{o})$ выполняется по формуле [8]

$$\mu(\tilde{o})=\int_c^d x\mu(x)\,dx\Big/\int_c^d\mu(x)\,dx. \qquad (8)$$

Выполним необходимые действия для расчета условного ожидаемого значения нечетко заданной продолжительности T_{ij} пребывания в $Å_i$ при условии перехода в $Å_j$. Имеем

$$\int_{b_{ij}^{-1}}^{a_{ij}^{-1}}\mu\left(T_{ij}\right)dT_{ij}=\frac{1}{a_{ij}}-\frac{1}{b_{ij}},$$

$$\int_{b_{ij}^{-1}}^{a_{ij}^{-1}}T_{ij}\mu\left(T_{ij}\right)dT_{ij}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{a_{ij}}\right)^2-\left(\frac{1}{b_{ij}}\right)^2\right].$$

Тогда с учетом (8), получим

$$M\left[T_{ij}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{ij}}+\frac{1}{b_{ij}}\right)=\frac{a_{ij}+b_{ij}}{2a_{ij}b_{ij}}.$$

Теперь, используя естественный аналог (4), вычислим безусловное ожидаемое значение пребывания в $Å_i$ до перехода в любое другое состояние

$$T_i=\sum_{j\in E,j\neq i}P_{ij}T_{ij}=\sum_{j\in E,j\neq i}\frac{a_{ij}+b_{ij}}{2a_{ij}b_{ij}}.P_{ij}. \qquad (9)$$

Понятно, что простота соотношения (9) целиком и полностью обязана простоте задания функции принадлежности нечеткого параметра условной функции распределения продолжительности пребывания в каждом из состояний системы. Несомненно гораздо более трудной является задача учета возможной нечеткости в описании элементов матрицы переходных вероятностей $P=\left\{P_{ij}\right\}$, задаваемых соответствующими функциями принадлежности $\mu\left(P_{ij}\right)$. Проблема возникает при отыскании стационарного распределения вероятностей состояний ВМЦ в связи с необходимостью решения системы линейных алгебраических уравнений (2), (3), параметры которых заданы нечетко.

Возможный подход к решению задачи состоит в нижеописанном.

Основные результаты

Запишем систему уравнений (2), (3) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}&\pi_1\left(Ð_{11}-1\right)+\pi_2Ð_{21}+...+\pi_ï\,Ð_{ï1}=0,\\ &\pi_1\left(Ð_{12}-1\right)+\pi_2Ð_{22}+...+\pi_ï\,Ð_{ï2}=0,\\ &...\\ &\pi_1Ð_{1,ï-1}+\pi_2Ð_{2,ï-1}+...+\\ &+\pi_{ï-1}\left(Ð_{ï-1,ï-1}-1\right)+\pi_ï\,Ð_{ï,ï-1}=0,\\ &\pi_1+\pi_2+...+\pi_{ï-1}+\pi_ï=1.\end{aligned} \qquad (10)$$

Решим систему уравнений (10), задав значения коэффициентов $Ð_{ij}$ равными их модальным значениям $Ð_{ij}^{(0)}, i=1,2,..,n, j=1,2,..n-1.$

Пусть $\pi^{(0)}=\left(\pi_1^{(0)},\pi_2^{(0)},...,\pi_ï^{(0)}\right)$ – решение этой системы. Введем теперь набор чисел

$$\begin{aligned}&Z_1=\pi_1\left(Ð_{11}-1\right)+\pi_2Ð_{21}+...+\pi_ï\,Ð_{ï1},\\ &Z_2=\pi_1\left(Ð_{12}-1\right)+\pi_2Ð_{22}+...+\pi_ï\,Ð_{ï2},\\ &...\\ &Z_{ï-1}=\pi_1Ð_{1,ï-1}+\pi_2Ð_{2,ï-1}+...+\pi_ï\,Ð_{ï,ï-1}.\end{aligned} \qquad (11)$$

Используя правила выполнения операций над нечеткими числами [6 – 8], с учетом заданных функций принадлежности для переходных вероятностей $\left(P_{ij}\right)$, найдем функции принадлежности $\mu(Z_1),\mu(Z_2),..,\mu(Z_{ï-1})$ нечетких чисел (11). Модальные значения этих нечетких чисел зависят от набора $\left(\pi_1,\pi_2,...,\pi_ï\right)$ и равны

$$Z_1^{(0)} = \pi_1\left(\text{Ð}_{11}^{(0)} - 1\right) + \pi_2 \text{Ð}_{21}^{(0)} + \ldots + \pi_{\text{ï}}\, \text{Ð}_{\text{ï}\,1}^{(0)},$$

$$Z_2^{(0)} = \pi_1\left(\text{Ð}_{12}^{(0)} - 1\right) + \pi_2 \text{Ð}_{22}^{(0)} + \ldots + \pi_{\text{ï}}\, \text{Ð}_{\text{ï}\,2}^{(0)},$$

....

$$Z_{\text{ï}-1}^{(0)} = \pi_1 \text{Ð}_{1,\text{ï}-1}^{(0)} + \pi_2 \text{Ð}_{2,\text{ï}-1}^{(0)} + \ldots + \pi_{\text{ï}}\, \text{Ð}_{\text{ï},\text{ï}-1}^{(0)}.$$

Понятно что компактность и конфигурация функций принадлежности $\mu(Z_1), \mu(Z_2), .., \mu(Z_{\text{ï}-1})$ также определяется набором $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{\text{ï}})$. Теперь можно поставить задачу отыскания четкого решения нечеткой системы уравнений (10). К этому решению можно предъявить некоторые естественные требования. Во-первых, искомый набор $\pi^* = \left(\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_{\text{ï}}^*\right)$ должен минимально отличаться от набора $\left(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, ..., \pi_{\text{ï}}^{(0)}\right)$, т.е. модальные значения $Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, ..., Z_{\text{ï}-1}^{(0)}$ должны быть максимально близки к нулю. Во-вторых, желательно, чтобы тела неопределенности, задаваемые функциями принадлежности $\mu\left(Z_1, \text{Ï}^*\right), \mu\left(Z_2, \text{Ï}^*\right), .., \mu\left(Z_{\text{ï}-1}, \text{Ï}^*\right)$, были максимально компактными (наименее размытыми). Поясним сказанное.

Пусть нечеткие числа $\left(P_{ij}\right)$ заданы функциями принадлежности (L-R) – типа [4], то есть

$$\mu\left(P_{ij}\right) = \begin{cases} L\left(\dfrac{P_{ij}^{(0)} - P_{ij}}{\alpha_{ij}}\right), P_{ij} \le P_{ij}^{(0)}, \\ R\left(\dfrac{P_{ij} - P_{ij}^{(0)}}{\beta_{ij}}\right), P_{ij} \rangle P_{ij}^{(0)}, \end{cases} \tag{12}$$

α_{ij}, β_{ij} - левый и правый коэффициенты нечеткости.

Если в качестве L и R –функций выбрать гауссовы, то (12) имеет вид

$$\mu\left(P_{ij}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(P_{ij}^{(0)} - P_{ij}\right)^2 \Big/ \left(2\alpha_{ij}\right)\right\}, P_{ij} \le P_{ij}^{(0)}, \\ \exp\left\{-\left(P_{ij} - P_{ij}^{(0)}\right)^2 \Big/ \left(2\beta_{ij}\right)\right\}, P_{ij} \rangle P_{ij}^{(0)}. \end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что соотношение (13) может быть записано компактнее:

$$\mu_{ij}\left(P_{ij}\right) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\left(P_{ij} - P_{ij}^{(0)}\right)^2}{2D_{ij}}\left(1 + r_{ij}\mathrm{Sign}\left(P_{ij} - P_{ij\,ij}^{(0)}\right)\right)\right\}. \tag{14}$$

Неизвестные параметры D_{ij} и r_{ij} легко определяются через заданные значения α_{ij} и β_{ij}. Запишем (14) следующим образом:

$$\mu\left(P_{ij}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\left(P_{ij}^{(0)} - P_{ij}\right)^2}{2\dfrac{D_{ij}}{1 - r_{ij}}}\right\}, P_{ij} \le P_{ij}^{(0)}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\left(P_{ij} - P_{ij}^{(0)}\right)^2}{2\dfrac{D_{ij}}{1 + r_{ij}}}\right\}, P_{ij} \rangle P_{ij}^{(0)}. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{D_{ij}}{1 - r_{ij}} = \alpha_{ij}, \quad \frac{D_{ij}}{1 + r_{ij}} = \beta_{ij},$$

откуда

$$\frac{1 + r_{ij}}{1 - r_{ij}} = \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}, \quad r_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - \beta_{ij}}{\alpha_{ij} + \beta_{ij}},$$

$$D_{ij} = \alpha_{ij}\left(1 - r_{ij}\right) = \beta_{ij}\left(1 + r_{ij}\right) = \frac{2\alpha_{ij}\beta_{ij}}{\alpha_{ij} + \beta_{ij}}.$$

Теперь, с учетом (11) и (13), запишем функции принадлежности нечетких чисел

$$\mu\left(Z_i\right) = \mu\left(\sum_{j \ne i} \pi_j \text{Ð}_{ij} + \pi_i\left(P_{ii} - 1\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(Z_i - \overline{Z}_i\right)^2}{\alpha_{ij}}\right), Z_i \le \overline{Z_i}, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(Z_i - \overline{Z}_i\right)^2}{\beta_{ij}}\right), Z_i > Z_i, \end{cases}$$

$$\overline{Z}_i = \sum_{j \ne i} \pi_j \text{Ð}_{ij}^{(0)} + \pi_i\left(P_{ij}^{(0)} - 1\right),$$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_j^2 \alpha_{ij}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_j^2 \beta_{ij}, \quad i = 1, 2, .., n - 1.$$

В качестве показателя компактности тела неопределенности, задаваемого функцией принадлежности, естественно использовать площадь под соответствующей кривой, то есть

$$S_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mu\left(Z_i\right) dZ_i = \int_{-\infty}^{Z_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(Z_i - \overline{Z}_i\right)^2}{\alpha_i}\right) dZ_i +$$

$$+ \int_{-\infty}^{Z_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(Z_i - \overline{Z}_i\right)^2}{\beta_i}\right) dZ_i = \sqrt{\frac{\Pi}{2}}\left(\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_i}\right).$$

Тогда комплексный критерий оптимальности набора $\pi^* = \left(\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_{\text{ї}}^*\right)$ имеет вид

$$I\left(\pi^*\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_i^{\frac{1}{2}}\left(\pi^*\right) + \beta_i^{\frac{1}{2}}\left(\pi^*\right) \right) + \\ + \left(\pi^* - \pi^{(0)}\right)\left(\pi^* - \pi^{(0)}\right)^T . \qquad (15)$$

Таким образом задача отыскания стационарного распределения вероятностей состояний ВМЦ, сведена к задаче математического программирования: найти набор $\pi^* = \left(\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_{\text{ї}}^*\right)$, минимизирующий (15) и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^* = 1, \; \pi_1^* \geq 0. \qquad (16)$$

Пусть этот набор найден. Тогда с его использованием, с учетом (1), (4), может быть рассчитан вектор финальных вероятностей состояний ПМП. В случае необходимости комплексный критерий (15) может быть модифицирован за счет ввода весовых коэффициентов, учитывающих возможные различия в уровнях требований к разным компонентам критерия.

Заметим, наконец, что в качестве альтернативного критерия компактности тел неопределенности для функций принадлежности $\mu_i\left(Z_i\right), i = 1, 2, .., n-1$, может быть выбрана суммарная длина носителей соответствующих им множеств γ-уровня, которая равна

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\gamma), \;\; R_i(\gamma) = \left\{Z_i : \mu\left(Z_i\right) \geq \gamma\right\}.$$

Однако, это никак не облегчает задачу (15), (16), поскольку, как легко показать, аналитическое выражение для расчета $R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\gamma)$ повторяет выражение для $S = \sum_{i=1}^{n-1} S_i$ с весовым коэффициентом, зависящим от γ.

Выводы

Рассмотрена задача анализа системы, изменение состояний которой управляется полумарковским процессом с нечетко заданными параметрами. Рассмотрены ситуации, когда нечеткими являются параметры условных функций распределения пребывания системы в каждом из возможных состояний до ухода, а также вероятности переходов для марковской цепи, вложенной в полумарковский процесс. Получены соотношения для расчета финального распределения состояний системы.

Список литературы

1. *Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 182 с.*
2. *Тихонов В.Н. Марковские процессы / В.Н. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.*
3. *Zadeh L. Fuzzy Sets / L. Zadeh // Information and Control. – 1965. – vol.8(3). – P. 338-353.*
4. *Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике: Пер. с франц. / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: Радио и связь, 1982. – 486 с.*
5. *Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 486 с.*
6. *Раскин Л.Г. Нечеткая математика / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.*
7. *Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко Н.Н., 2010. – 512 с.*

Поступила в редколлегию 1.04.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

НЕЧІТКІ НАПІВМАРКІВСЬКІ МОДЕЛІ СИСТЕМ

С.В. Кадигроб, Т.І. Каткова

Запропонована методика аналізу процесу функціонування складної системи, моделлю якої є напівмарківський процес з нечітко заданими параметрами. Отриманий набір фінальної вірогідності станів системи, що містить необхідну інформацію про ефективність функціонування.

Ключові слова: *система, безвідмовність, умови експлуатації, витрата ресурсу, інтенсивність відмов.*

FUZZY SEMI - MARKOV MODELS OF THE SYSTEMS

S.V. Kadigrob, T.I. Katkova

The method of analysis of functioning process of the difficult system the model of which is a semi - Markov process with fuzzy parameters is offered. The set of final probabilities of the states of the system, containing the required information about efficiency of functioning, is got.

Keywords: *system, faultlessness, external environments, expense of resource, intensity of refuses.*