

УДК 621.391, 621.372

Н.П. Чернобородова<sup>1</sup>, М.П. Черноборов<sup>2</sup><sup>1</sup> ВАТ "Перетворювач", Запоріжжя<sup>2</sup> Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя

## АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОСТІ ВІДОМИХ ВАГОВИХ ФУНКЦІЙ У МАЛОТОЧКОВИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ ФУР'Є

Показано, що для дискретних перетворень Фур'є з малою кількістю фільтрів, сам собою рівень бічних пелюсток не є самостійним інформативним показником якості вагової функції. Цей параметр обов'язково мусть доповнюватися відомостями про коефіцієнт розширення головної пелюстки фільтра відносно ядра Дирихле, визначений за місцем розташування першого нуля АЧХ. Висновок про оптимальність вагової функції за критеріями мінімального розширення головної пелюстки й максимального пригнічення бічних пелюсток фільтра можна зробити за його ФЧХ: чим більша розбіжність ФЧХ фільтрів з прямокутним вікном й досліджуваною ваговою функцією, тим гіршими є показники вікна.

**Ключові слова:** дискретне перетворення Фур'є, амплітудно-частотна характеристика, фазово-частотна характеристика, вагове вікно, фільтр, рівень бічних пелюсток.

### Вступ

**Постановка проблеми.** У системах первинної обробки інформації (СПОІ) радіолокаційних станцій (РЛС) для виявлення цілей широко застосовується спектральний аналіз методом дискретного перетворення Фур'є (ДПФ).

Через недостатньо низький рівень бічних пелюсток (РБП, -13 дБ) фільтрів, за обчислення ДПФ застосовують вагові функції.

У ґрунтовній роботі Ф. Дж. Херіса [1] підбиті підсумки досліджень багатьох відомих вагових функцій за відсутності обмежень на час спостереження за досліджуванним сигналом. Проілюстровано, що застосування вагової обробки дозволяє істотно зменшити РБП, але спричиняє певне розширення головної пелюстки амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) фільтрів ДПФ. Ні в [1], ні в інших відомих роботах з синтезу вагових вікон (з останніх можна назвати [2 – 4]) не приділяється увага ступеневі розширення головної пелюстки.

Також, не досліджується причинно-наслідковий зв'язок цих явищ.

Як у наявних, так й у нових РЛС інтервал спостереження істотно обмежується вимогами до часу оновлення інформації на екрані робочого міста оператора. Тому кількість випромінюваних станцією імпульсів зондування тотожна кількості фільтрів ДПФ й становить величину  $N=8\dots 16$ . Така малочисловість ДПФ обумовлює необхідність проведення додаткових досліджень відомих вікон й спонукає до пошуку нових критеріїв оптимальності вагових функцій.

**Метою статті** є дослідження причин розширення головної пелюстки фільтра та пошук критеріїв оптимальності вагових функцій для малочислових ДПФ.

### Параметри АЧХ фільтрів ДПФ як критерії оптимальності вікон

Однією з важливих тактико-технічних характеристик РЛС є рівень пригнічення пасивної завади. Наприклад, для луна-сигналів, відбитих від гірської місцевості, рівень відношення (пасивна завада)/шум може становити більше 60 дБ. За таких умов рівень міжфільтрового просочування функції вікна стає одним з найвпливовіших чинників подальшої процедури виявлення корисних сигналів [4].

Відомо [1], що РБП є одним з чинників, що характеризує ступінь міжфільтрового просочування. Зменшення рівня просочування можна досягти не лише шляхом пригнічення РБП, а й розташуванням нулів АЧХ на центральних частотах фільтрів ДПФ. Тоді рівень просочування визначається лише шириною центральної пелюстки. Вагові функції з такими властивостями в [1] названі "напрочуд хорошими". Загально відомим прикладом є вікна Блекмана-Херіса [1] з максимальним рівнем першої бічної пелюстки -92 дБ. Сучасники (наприклад, [3]) досягають РБП у -200 дБ й менше.

Оскільки зменшення РБП досягається за рахунок розширення головної пелюстки, то відомі [1 – 3] функції з рівнем пригнічення бічних пелюсток -60 дБ й нижче мають перший нуль АЧХ, розташований за центральною частотою другого чи, навіть, третього фільтрів ДПФ. Через це амплітуда потужної пасивної завади з нульовим доплерівським зсувом частот накопичуватиметься не лише у нульовому фільтрі.

На рис. 1 наведено АЧХ фільтрів 8-точкового ДПФ без вікна та із застосуванням вагових функцій Блекмана-Херіса. Можна побачити, що на центральній частоті першого фільтра, що відповідає значенню  $\varphi=2\cdot\pi\cdot n/N=360^\circ\cdot 1/8=45^\circ$ , мінімальна 4-членна

функція Блекмана-Херіса з РБП у  $-92$  дБ<sup>1</sup> (рис. 1, д) забезпечуватиме пригнічення тієї пасивної завади лише на 3,5 дБ, а на частоті другого фільтра (або  $\varphi=90^\circ$ ) – на 14 дБ, а на частоті третього фільтра (або  $\varphi=135^\circ$ ) – на 36 дБ. Таким чином, пасивна завада навіть середньої потужності матиме настільки вагомий внесок в амплітуди, які накопичуватимуться у фільтрах номер 0, 1, 2, N-2, N-1, що практично унеможливить виявлення цілі у цих фільтрах. Тобто, за N=8 виявлення малорозмірної цілі буде можливим лише у 3 фільтрах з 8... Завдяки вужчій смузі пропускання, 4-членна функція Блекмана-Херіса ( $-74$  дБ<sup>1</sup>) (див. рис. 1, г) має дещо більші рівні пригнічення пасивної завади (4,5 дБ; 18,5 дБ; 53 дБ, відповідно), але й істотно вищий РБП:  $-61$  дБ.

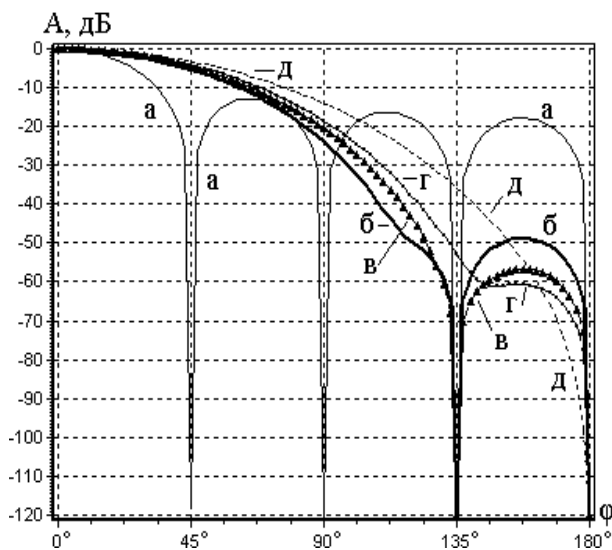


Рис. 1. Вікна ДПФ для N=8:  
— прямокутне ( $-13$  дБ) (а) й Блекмана-Херіса:  
— 3-членне ( $-61$  дБ<sup>1</sup>) (б),  
▲ мінімальне 3-членне ( $-67$  дБ<sup>1</sup>) (в),  
— 4-членне ( $-74$  дБ<sup>1</sup>) (г),  
- - - мінімальне 4-членне ( $-92$  дБ<sup>1</sup>) (д)

Отже, для малоточкових ДПФ, сам собою РБП не може бути самостійним інформативним показником якості вагової функції. Цей параметр обов'язково мусить доповнюватися відомостями про ширину головної пелюстки фільтра. Але, як можна побачити з рис. 1, звичний спосіб визначення смуги пропускання фільтра за рівнем  $-3$  дБ чи  $-6$  дБ теж не є інформативним. Тому надалі оцінюватимемо ширину головної пелюстки фільтра за положенням першого нуля АЧХ, а визначатимемо як коефіцієнт розширення (кратності) головної пелюстки фільтра з ваговим вікном відносно фільтра без вікна. Тобто, прямокутне вікно (ядро Дирихле) має одиничну ши-

рину смуги пропускання ( $1x$ ), 3-членні вікна Блекмана-Херіса – потрійну ширину ( $3x$ ), а 4-членні вікна – в четверо ширші за прямокутне ( $4x$ ).

Порівнюючи АЧХ фільтрів для різних вагових функцій, можна дійти висновку про неоптимальність багатьох відомих вікон (головна пелюстка – заширока, РБП – недостатньо низький) через:

а) наявність функцій вікна з однаковою шириною пелюстки (за рівнем першого нуля АЧХ) й різним РБП (графіки б) й в) на рис. 1);

б) наявність вікон з різною шириною пелюстки й близькими значеннями РБП (графіки г) й в) на рис. 1);

в) залежність рівня бічних пелюсток від кількості крапок (фільтрів) ДПФ N (див. рис. 2 й примітки до рис. 1).

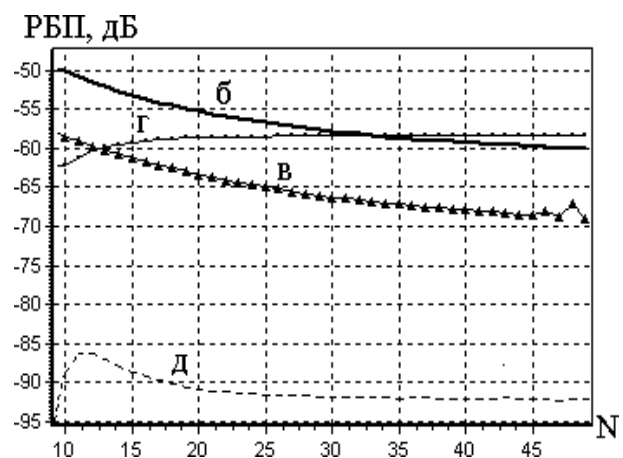


Рис. 2. Залежність РБП від кількості фільтрів ДПФ для вікон Блекмана-Херіса:  
— 3-членне ( $-61$  дБ<sup>1</sup>) (б),  
▲ мінімальне 3-членне ( $-67$  дБ<sup>1</sup>) (в),  
— 4-членне ( $-74$  дБ<sup>1</sup>) (г),  
- - - мінімальне 4-членне ( $-92$  дБ<sup>1</sup>) (д)

Як продемонстровано на рис. 2, в області практично застосовуваних значень в СПОІ РЛС кількості фільтрів ДПФ N=8...16 розкид РБП може сягати 10 дБ. Це обумовлюватиме додаткові втрати у пристрої виявлення цілей тих РЛС, що працюють з попачковою вобуляцією імпульсів зондування і пачками з різним значенням N (наприклад, у випадку аеродромного автоматизованого радіолокаційного комплексу "Дніпро-А" чи РЛС 79К6 "Пелікан").

Таким чином, для малоточкових ДПФ рівень міжфільтрового просочування можна мінімізувати лише за:

а) розташування нулів АЧХ на центральних частотах решти фільтрів;

б) максимального пригнічення бічних пелюсток й пов'язаного з цим мінімального розширення головної пелюстки фільтра відносно ядра Дирихле.

<sup>1</sup> Заявлені в [1] РБП справедливі лише для багатоточкових ДПФ (N>30). В решті випадків дійсний РБП – дещо менший й тим більше відрізняється від заявленого, чим менше N (див. рис. 2).

### Дослідження причин розширення головної пелюстки фільтрів ДПФ

Для виявлення причин розширення головної пелюстки фільтра проаналізуємо математичний вираз ДПФ:

$$\hat{G}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \hat{S}_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k}, \quad (1)$$

де  $N$  – кількість імпульсів зондування однієї частотної пачки,  $a_k$  – вагові коефіцієнти ( $0 < a_k \leq 1$ , дійсні числа),  $\hat{S}_k$  – оцифровані відліки вхідного сигналу (комплексні числа).

Наявність множника  $a_k$  в (1) свідчить про те, що за обчислення ДПФ враховується не уся амплітуда кожного відліку сигналу  $\hat{S}_k$ , а лише її відповідна частина (оскільки  $0 < a_k \leq 1$ ). Тобто штучне зменшення амплітуд вхідних сигналів до рівня  $a_k \cdot \hat{S}_k$  дозволяє змінювати параметри фільтрів: ширину головної пелюстки, РБП тощо.

Відомо, що ДПФ суми сигналів дорівнює сумі ДПФ, обчислених для кожного сигналу окремо [5]. Тоді, розглядаючи вагову функцію як засіб навмисного спотворення амплітуди кожного відліку оброблюваного сигналу  $\hat{S}_k$  з метою досягнення бажаних характеристик АЧХ, подамо вираз (1) наступним чином:

$$\hat{G}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} - \sum_{k=0}^{N-1} (1 - a_k) \cdot \hat{S}_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k}. \quad (2)$$

Першим доданком у (2) є ДПФ з прямокутним вікном (тобто без вагової обробки), а другий доданок (фактично – це втрати в обробці сигналу) характеризує відмінність зваженого спектру  $G(n)$  від незваженого. Тобто, дослідження характеристик фільтрів ДПФ з ваговою функцією  $1 - a_k$  допоможе визначити зв'язок між шириною головної пелюстки й РБП фільтра з вікном  $a_k$ .

На рис. 3 наведено АЧХ фільтрів ДПФ з прямокутним вікном й функцією втрат  $1 - a_k$  для випадку 3-членного вікна Блекмана-Херіса (-61 дБ). За віднімання з однієї характеристики іншої (відповідно до (2)) через їх амплітудну розбіжність утворюються розширена (відносно АЧХ прямокутного вікна) головна й бічні пелюстки фільтра з функцією  $a_k$ . Ширина й крутизна головної пелюстки, а також ступінь пригнічення бічних пелюсток залежить від величини розбіжності характеристик прямокутного вікна й функції  $1 - a_k$  на різних ділянках АЧХ.

З наведених на рис. 4 АЧХ фільтрів, утворених за використання функцій  $1 - a_k$  різних вікон, можна побачити малу амплітудну відмінність характеристик.

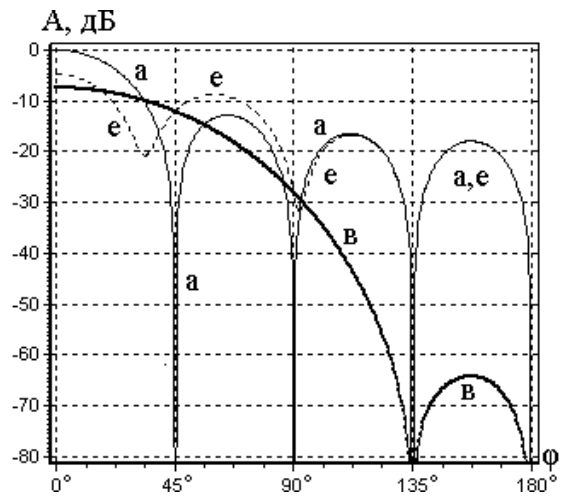


Рис. 3. Модулі АЧХ фільтрів ДПФ ( $N=8$ ) з прямокутним вікном (а), мінімальною 3-членною функцією вікна Блекмана-Херіса (-67 дБ)  $a_k$  (в), ваговою функцією  $1 - a_k$  (с)

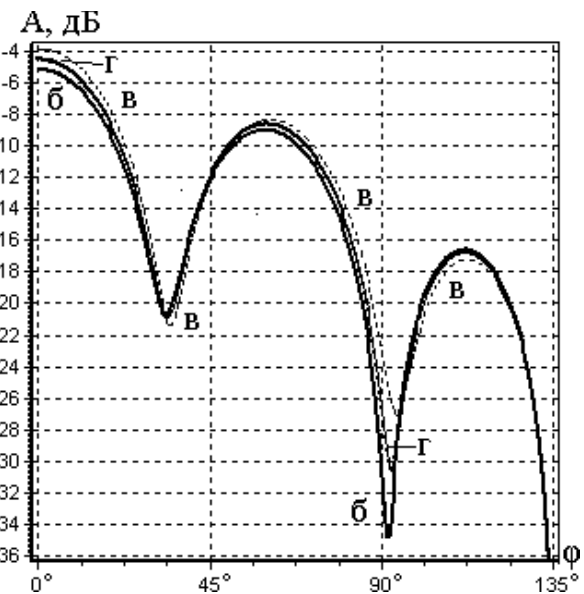


Рис. 4. Модулі АЧХ фільтрів ДПФ ( $N=8$ ) з ваговою функцією  $1 - a_k$  для вікон Блекмана-Херіса: 3-членне (-61 дБ) (б), мінімальне 3-членне (-67 дБ) (в), 4-членне (-74 дБ) (г)

Враховуючи, що:

а) за обчислення (2) перший доданок є сталим, а другий (для різних вагових функцій) – дуже мало змінюється (див. рис. 4);

б) вираз (2) є операцією над комплексними числами, то рівень пригнічення бічних пелюсток та ступінь розширення головної пелюстки (відповідно до (2)) також залежить і від збігу фазочастотних характери-

стик (ФЧХ) функції прямокутного вікна й вагової функції  $1-a_k$  (див. рис. 5).

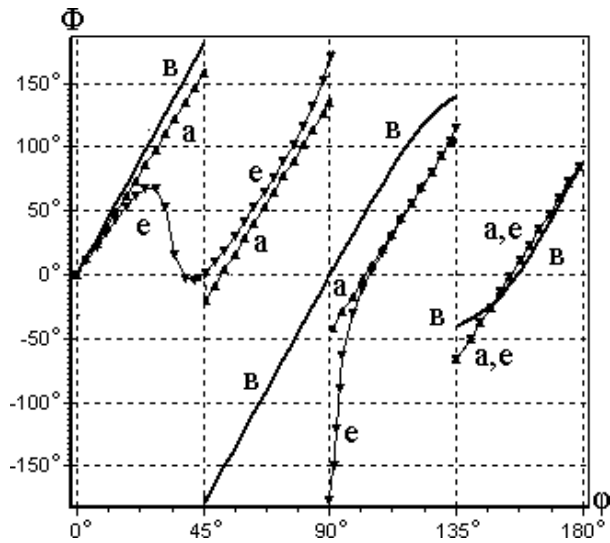


Рис. 5. ФЧХ фільтрів ДПФ (N=8): з прямокутним вікном (а); з ваговими функціями  $1-a_k$  (е) й  $a_k$  (в) мінімального 3-членного вікна Блекмана-Херіса (-67 дБ)

Оскільки у (2) відбувається віднімання комплексних чисел, то підсумок такої операції набудатиме мінімального значення не лише за умови збігу АЧХ, але й ФЧХ фільтрів з прямокутним вікном й функцією  $(1-a_k)$ . Лише тоді будуть одержані мінімально можливе розширення головної пелюстки й максимально можливе пригнічення бічних пелюсток.

Розглянемо для випадку мінімального 3-членного вікна Блекмана-Херіса (-67 дБ) область першої бічної пелюстки (діапазон значень фаз  $\varphi=135^\circ \dots 180^\circ$ ). Через недостатньо високу ступінь збігу як амплітудних (див. рис. 3), так фазових (див. рис. 5) характеристик прямокутного вікна (криві а) й функції  $1-a_k$  (криві е) підсумкова фазова характеристика (ФЧХ фільтра з функцією  $a_k$  – див. рис. 5, в) відрізняється від лінійної ФЧХ прямокутного вікна, а підсумкова амплітудна характеристика (див. рис. 3, в) за віднімання відповідно до (2) не досягає мінімально можливого значення РБП.

Якщо аналогічно проаналізувати залежності АЧХ й ФЧХ для  $\varphi=0^\circ \dots 135^\circ$ , то можна зробити висновок про немінімальність розширення головної пелюстки досліджуваного мінімального 3-членного вікна Блекмана-Херіса (-67 дБ) через відмінність ФЧХ фільтрів з функцією  $a_k$  від прямокутного вікна (див. рис. 5, в). Для отримання мінімального розширення головної пелюстки підсумкової АЧХ необхідно, аби ФЧХ фільтрів з функцією  $1-a_k$  й прямокутного вікна (див. рис. 5, криві а, в):

а) збіглися в тих діапазонах значень  $\varphi$ , у яких значення АЧХ фільтра з прямокутним вікном пере-

вищують відповідні значення для функції  $1-a_k$ . Тобто в області головної пелюстки ( $\varphi=0^\circ \dots 45^\circ$ ) та другої бічної пелюстки ( $\varphi=90^\circ \dots 135^\circ$ ) ядра Дирихле (рис. 3);

б) відрізнялися на  $180^\circ$  в тих діапазонах значень  $\varphi$ , у яких значення АЧХ фільтра з функцією  $1-a_k$  з перевищують відповідні значення для прямокутного вікна. Тобто в області першої бічної пелюстки ( $\varphi=45^\circ \dots 90^\circ$ ) ядра Дирихле (див. рис. 3).

Як відомо з основ математичного аналізу (як розділу математики [5]) функція  $y(x)$  змінює знак за кожного перетинання вісі ОХ (стосовно досліджуванних тут характеристик – для тих значень  $\varphi$ , для яких АЧХ набуває нульових значень). Для вікна Дирихле такими точками є значення  $\varphi=2 \cdot \pi \cdot n/N$  ( $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  й  $180^\circ$ ). А для фільтра з функцією  $1-a_k$  – це лише  $135^\circ$  й  $180^\circ$ . Як можна побачити на рис. 3, поблизу крапок  $45^\circ$  та  $90^\circ$  АЧХ функції втрат не має розривів (рис. 3 виконано у логарифмічному масштабі), а містить лише два локальних мінімуми. Тому ФЧХ для вікна  $1-a_k$  у цих точках (див. рис. 5, е) не має зміни знаку: вона відбувається лише для  $\varphi=135^\circ$  й  $\varphi=180^\circ$ .

Таким чином, операція віднімання (2) як функція від  $\varphi$  не набудатиме мінімально можливих значень за формування підсумкової АЧХ фільтра з ваговим вікном  $a_k$  за умови розбіжності ФЧХ фільтрів з прямокутною функцією вікна й досліджуваною ваговим вікном  $a_k$ . Наведені на рис. 6 ФЧХ фільтрів з прямокутним вікном й ваговими функціями Блекмана-Херіса дозволяють впевнитися у їх неоптимальності за критерієм мінімуму міжфільтрового просочування (для  $\varphi=0^\circ \dots 45^\circ, 90^\circ \dots 180^\circ$  залежності ФЧХ, позначені як б, в, г, д не збігаються з прямою а; для  $\varphi=45^\circ \dots 90^\circ$  ФЧХ б, в, г, д не відрізняються від залежності а на  $180^\circ$ ), в першу чергу – для мінімальних 3- й 4-членних.

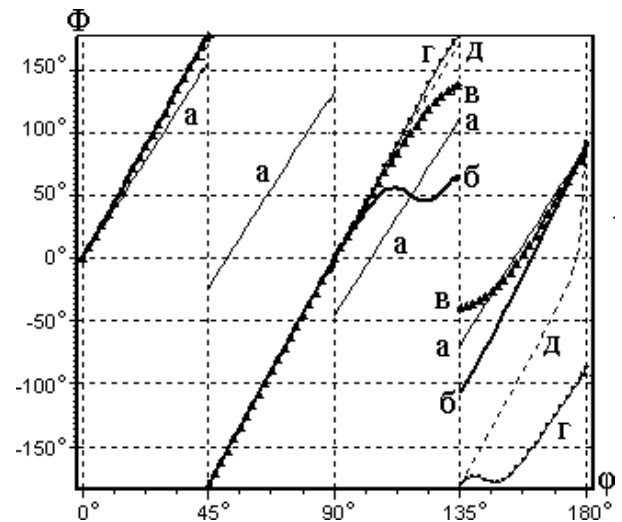


Рис. 6. ФЧХ фільтрів з вікнами ДПФ для N=8: — прямокутне (-13 дБ) (а) й Блекмана-Херіса: — 3-членне (-61 дБ) (б), ▲ мінімальне 3-членне (-67 дБ) (в), —▲ 4-членне (-74 дБ) (г), - - мінімальне 4-членне (-92 дБ) (д)

Окрім одержання загального уявлення про оптимальність досліджуваних вагових функцій за розглянутим критерієм, ФЧХ може дати відповідь на питання чи має це вікно штучно зменшену ширину головної пелюстки (починаючи з певного рівня – звичайно, від -50 дБ). Прикладом таких вікон є 3- й 4-членні функції Блекмана-Херіса (див. рис. 1, б, г), Кравченка [2, 6], тощо. Такі функції дозволяють одержати певне звуження головної пелюстки, але це призводить до збільшення рівня бічних пелюсток. Аналіз оптимальності таких вікон й доцільність їх застосування буде виконано у наступних дослідженнях авторів.

### Висновки

Показано, що для малоточових ДПФ рівень міжфільтрового просочування можна мінімізувати лише за:

а) розташування нулів АЧХ на центральних частотах решти фільтрів;

б) максимального пригнічення бічних пелюсток й пов'язаного з цим мінімального розширення головної пелюстки фільтра відносно ядра Дирихле.

Висновок про оптимальність вагової функції за критеріями мінімального розширення головної пелюстки й максимального пригнічення бічних пелюсток фільтра можна зробити за його ФЧХ: чим більша розбіжність ФЧХ фільтрів з прямокутним вікном й досліджуваною ваговою функцією  $a_k$ , тим гіршими є показники вікна.

Подальші дослідження треба вести в напрямку аналізу методів одержання вагових функцій з метою

усунення методичних недоліків, які спричиняють неоптимальність характеристик вікон.

### Список літератури

1. Хэррис Ф.Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф.Дж. Хэррис // ТИИЭР. – 1978. – Т. 66. – № 1. – С. 60-96.
2. Дворкович А.В. Синтез эффективных оконных функций для оценки параметров сигналов с помощью ДПФ / А.В. Дворкович // Радиотехника. – 2005. – № 5. – С. 25-34.
3. Годлевский В.С. Численный синтез оконных функций для дискретного преобразования Фурье / В.С. Годлевский, А.М. Денисенко // Электронное моделирование. – 2006. – Т. 28, № 4. – С. 75-87.
4. Чорнобородова Н. П. Синтез вагових функцій з малим рівнем міжфільтрового просочування для дискретного перетворення Фур'є / Н.П. Чорнобородова, М.П. Чорнобородов // Системи озброєння і військова техніка. – 2008. – № 2. – С. 159-162.
5. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев // М.: Наука. – 1980. – 976 с.
6. Кравченко В.Ф. Построение новых окон для обработки сигналов на основе атомарных функций / В.Ф. Кравченко, В.А. Рвачёв, В. Л. Рвачёв // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 306, № 1. – С. 78-81.

Надійшла до редколегії 13.04.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Д. Карлов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

### АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОСТИ ИЗВЕСТНЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ В МАЛОТОЧЕЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ

Н.П. Чорнобородова, М.П. Чорнобородов

Показано, что для дискретных преобразований Фурье с малым количеством фильтров, сам по себе уровень боковых лепестков не является самостоятельным информативным показателем качества весовой функции. Этот параметр обязательно должен дополняться сведениями о коэффициенте расширения главного лепестка фильтра относительно ядра Дирихле, определённый по положению первого нуля АЧХ. Вывод об оптимальности весовой функции по критериям минимального расширения главного лепестка и максимального подавления боковых лепестков фильтра можно сделать по его ФЧХ: чем больше отличие ФЧХ фильтров з прямоугольным окном и исследуемой весовой функцией, тем хуже показатели окна.

**Ключевые слова:** дискретное преобразование Фурье, амплитудно-частотная характеристика, фазово-частотная характеристика, весовое окно, фильтр, уровень боковых лепестков.

### AN ANALYSIS OF OPTIMALITY OF THE KNOWN GRAVIMETRIC FUNCTIONS IS IN LITTLEPOINT DISCRETE TRANSFORMATIONS OF FUR'E

N.P. Chornoborodova, M.P. Chornoborodov

It is rotined that for discrete transformations of Fur'e with a few of filters, in itself a level of sidelobes is not the independant informing index of quality of gravimetric function. This parameter necessarily must be complemented information about the coefficient of expansion of main petal of filter in relation to a kernel Dirichlet, certain according to the regulations of the first zero of ACHKH. Conclusion about the optimality of gravimetric function on the criteria of minimum expansion of main petal and maximal suppression of sidelobes of filter it is possible to do on his FCHKH: what anymore difference of FCHKH of filters of z by a rectangular window and probed gravimetric function, the worse indexes of window.

**Keywords:** discrete transformation of Fur'e, gain-frequency description, phase-frequency description, gravimetric window, filter, level of sidelobes.