УДК 519.232.2

В.Ю. Дубницкий, О.Е. Петренко

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Киев

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БРЭДФОРДА, БАРРА И ДАГУМА МЕТОДОМ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

Получены уравнения метода максимума правдоподобия для оценки параметров формы, положения и масштаба для распределений Брэдфорда (Bradford), Барра (Burr) и Дагума (Dagum),

Ключевые слова: *распределение Брэдфорда, распределение Бара, распределение Дагума, метод максимума правдоподобия.*

Введение и анализ литературы

В русскоязычной литературе по прикладным методам математической статистики появились упоминания о применении распределений Брэдфорда (Bradford), Барра (Burr) и Дагума (Dagum) при описании распределений данных, относящихся к различным предметным областям. Общим для этих распределений является то, что возможные значения соответствующей переменной расположены на положительной числовой полуоси. По внешнему виду плотности этих распределений похожи на логарифмически нормальное распределение. При определённых значениях их параметров они напоминают по своим свойствам ранее рассмотренные распределения Ципфа и Парето [1, 2].

Распределение Брэдфорда применяют при автоматической обработке текстов [3] и результатов геологических исследований [4]. Распределения Барра и Дагума используют при исследовании рисков, связанных с операциями на фондовом рынке [5 – 9].

В литературе по математической статистике, изданной на русском языке, даже в самых полных справочниках по статистическим распределениям отсутствуют сведения об этих распределениях. При выполнении данного исследования за основу была принята публикация [10].

Плотность закона распределения Брэдфорда (I) имеет вид:

$$f_I(x) = \frac{\theta}{\left(\theta(x - x_{min}) + x_{max} - x_{min}\right)\lg(\theta+1)}. \quad (1)$$

Функция распределения закона Брэдфорда имеет вид:

$$F_I(x) = \frac{\log\left(1 + \theta(x - x_{min})/\left(x_{max} - x_{min}\right)\right)}{\log(\theta+1)} \quad (2)$$

при условии, что $0 < \theta, x_{min} < x < x_{max}, x > 0,$ где x_{min}, x_{max} – наименьшее и наибольшее значение наблюдений в полученной выборке.

Плотность распределения Барра (II) имеет вид:

$$f_{II}(x) = \frac{cd}{bz^{c+1}\left(1 + z^{-c}\right)^{d-1}}, \quad (3)$$

где

$$z = \frac{x - a}{b}.$$

Функция распределения Барра имеет вид:

$$F_{II}(x) = \frac{1}{\left(1 + z^{-c}\right)^{d}}. \quad (4)$$

Плотность распределения Дагума (III) имеет вид:

$$f_{III}(x) = \frac{apx^{ap-1}}{b^{ap}\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{p+1}}. \quad (5)$$

Функция этого распределения имеет вид:

$$F_{III}(x) = \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]^{-p} \quad (6)$$

при условии, что $a > 0, b > 0, p > 0, x \ge 0.$

В работе [10] приведены выражения для числовых характеристик каждого из указанных законов распределения, однако сведения о способах получения этих оценок отсутствуют.

Цель работы – получение методом максимума правдоподобия (ММП) оценок параметров распределений Брэдфорда, Барра и Дагума.

Полученные результаты

Распределение Брэдфорда зависит только от одного параметра θ, поэтому в дальнейшем используем приведенное в [10] выражение для оценки среднего значения в виде:

$$\bar{x}_I = \frac{\theta R + k\left[x_{min}(\theta+1) - x_{max}\right]}{k\theta}, \quad (7)$$

где

$$k = \log(\theta+1). \quad (8)$$

Распределение Барра зависит от четырёх параметров: a, b, c, d. Поэтому для составления и решения системы уравнений ММП используем приведенные в [10] полученные по методу моментов оценки среднего значения $\bar{x}_{II}$, дисперсии S_{II}^2, асимметрии As_{II} и эксцесса Ex_{II}:

среднее значение

$$\bar{x}_{II} = a + \frac{b\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(d+\frac{1}{c}\right)}{\Gamma(d)}; \quad (9)$$

дисперсия

$$S^2 = k\frac{b^2}{\Gamma^2(d)} \quad (10)$$

при

$$k = \Gamma(d)\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma^2\left(d+\frac{1}{c}\right). \quad (11)$$

Для коэффициента асимметрии As_{II} в [10] приведено выражение вида:

$$As_{II} = \frac{\Gamma^2(d)}{k^{3/2}}\left[H - G + R\right], \quad (12)$$

где

$$H = \frac{2\Gamma^3\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma^3\left(d+\frac{1}{c}\right)}{\Gamma^2(d)}, \quad (13)$$

$$G = \frac{3\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}+d\right)\Gamma\left(\frac{2}{c}+d\right)}{\Gamma(d)}; \quad (14)$$

$$R = \Gamma\left(1-\frac{3}{c}\right)\Gamma\left(d+\frac{3}{c}\right). \quad (15)$$

Для коэффициента эксцесса выражение будет следующее:

$$Ex_{II} = \Gamma^3(d)\frac{1}{k^2}\left[U - V - W + Y\right], \quad (16)$$

где

$$U = 6\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma^2\left(d+\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(d+\frac{2}{c}\right); \quad (17)$$

$$V = \frac{3\Gamma^4\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma^4\left(d+\frac{1}{c}\right)}{\Gamma^3(d)}; \quad (18)$$

$$W = \frac{4\Gamma\left(1-\frac{3}{c}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}+d\right)\Gamma\left(\frac{3}{c}+d\right)}{\Gamma(d)}; \quad (19)$$

$$Y = \Gamma\left(1-\frac{4}{c}\right)\Gamma\left(\frac{4}{c}+d\right). \quad (20)$$

Распределение Дагума зависит от трёх параметров: $a > 0, b > 0, p > 0$ при $x \geq 0$. Далее нам потребуются оценки среднего значения, математического ожидания, дисперсии и коэффициента асимметрии.

Среднее значение определим по формуле:

$$\bar{x}_{III} = \frac{b\Gamma\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p)}. \quad (21)$$

Дисперсию определим по условию:

$$S_{III}^2 = \frac{b^2}{\Gamma^2(p)}\left[T - B\right]; \quad (22)$$

где

$$T = \Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{a}\right); \quad (23)$$

$$Q = \Gamma^2\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{a}\right). \quad (24)$$

Коэффициент асимметрии определим по условию:

$$Ex_{III} = \frac{b^3}{S^{3/2}\Gamma^3(p)}\left[V - W + Q\right], \quad (25)$$

где

$$V = \Gamma^2(p)\Gamma\left(p+\frac{3}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{a}\right); \quad (26)$$

$$W = -3\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right) \quad (27)$$

$$Q = 2\Gamma^3\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma^3\left(1-\frac{1}{a}\right). \quad (28)$$

Определим, используя ММП, параметр θ в законе распределения Брэдфорда. Пусть в условии (1)

$$x_{max} - x_{min} = R. \quad (29)$$

При этом выражение (1) примет вид:

$$f_I(x) = \frac{\theta}{\left(\theta(x - x_{min}) + R\right)M\ln(\theta+1)}, \quad (30)$$

где M=(lge) = 0,4329.

Тогда функция правдоподобия

$$L = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n}\left(\theta(x_i - x_{min}) + R\right)M^n\ln(\theta+1)^n}. \quad (31)$$

Логарифм функции правдоподобия

$$\ln L = n\ln\theta - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\theta(x_i - x_{min}) + R\right) + n\ln M + n\ln(\theta+1)\right). \quad (32)$$

Так как $n\ln M$ от величины θ не зависит, то выражение (32) примет вид:

$$\ln L = n\ln\theta - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\theta(x_i - x_{min}) + R\right) + n\ln(\theta+1)\right), \quad (33)$$

откуда следует, что:

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{min}}{\theta(x_i - x_{min}) + R} + \frac{n}{\theta+1}\right] = 0. \quad (34)$$

Разрешая это уравнение относительно θ, получим оценку $\hat{\theta}$ величины θ.

Используя ММП, определим параметры распределения Барра.

Для этого, используя условие (4), представим функцию правдоподобия для выборки, распределённой по закону Бара в виде

$$L=\frac{(cd)^n}{b^n\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{c+1}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{-c}\right)^{d-1}}. \quad (35)$$

Логарифм функции правдоподобия для условия (35) примет вид:

$$\ln L=n\ln(cd)-\left[\begin{array}{l} n\ln b+(c+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{x-a}{b}+ \\ +(d-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{-c}\right)\end{array}\right]. \quad (36)$$

Тогда для определения параметров закона Барра потребуется решение следующей системы уравнений относительно величин a, b, c, d:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{c+1}{x_i-a}-(d-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{-c}\frac{c}{x_i-a}=0; \\ \frac{c+1-n}{b}-(d-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{-c}\frac{c}{b}=0 \\ \frac{n}{c}-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b}\right)+(d-1)\times \\ \quad\times\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{-c}\ln\left(\frac{x_i-a}{b}\right)=0; \\ \frac{n}{d}-1-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)^{-c}=0. \end{cases} \quad (37)$$

Полученные решения и будут оценками соответствующих параметров закона Барра.

Аналогично, используя ММП, получим оценки параметров для распределения Дагума.

Функция правдоподобия с учётом условия (5) примет вид:

$$L=\frac{ap^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{ap-1}}{\left(b^{ap}\right)^n\prod\limits_{i=1}^{n}\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right]^{p+1}}. \quad (38)$$

Логарифм функции правдоподобия представим в виде

$$\begin{array}{l} L=n\ln(ap)+\left(ap-1\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i- \\ -\left[n\ln\left(b^{ap}\right)+(p+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x_i}{b}\right)^a\right]. \end{array} \quad (39)$$

Для получения оценок параметров распределения Дагума потребуется решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{n}{a}+p\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-pn\ln b-(p+1)\times \\ \quad\times\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\cdot\frac{\ln\left(\frac{x_i}{b}\right)}{\left(1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right)}=0; \\ -\frac{apn}{b}+\frac{a(p+1)}{b}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\cdot\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right]^{-1}=0; \\ \frac{n}{p}+a\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-na\ln b-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right]=0. \end{cases} \quad (40)$$

Особенностью полученных систем уравнений ММП является сложность определения начального приближения при численном их решении. Эта задача выходит за рамки данной работы и требует самостоятельного рассмотрения.

Выводы

Используя метод максимума правдоподобия, составлены системы уравнений, решение которых позволяет определить оценки параметров распределений Брэдфорда, Барра и Дагума.

Список литературы

1. Дубницкий В.Ю. Оценка параметров ранговых распределений: распределение Парето / В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2010. – Вип. 2(83). – С. 225-228.

2. Дубницкий В.Ю. Оценка параметров ранговых распределений: распределение Мандельброта-Ципфа / В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2010. – Вип. 5(86). – С.160-164.

3. Елизаров А.М. Математические методы в библиотечной работе / А.М. Елизаров, Ю.Е. Хохлов. – Казань: изд. Казанского университета, 1987. – 208 с.

4. Семиходский Г.Е. Прогноз газоносности ДДВ на основе статистических данных / Г.Е. Семиходский, Ю.В. Тимошин [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: www.geolib.ru/Oil Gas Geo/1982/07/Stat/Stat 03. html-26.03.2010г. – Загл.с экрана.

5. Пырлик В.Н. Построение модели одновременной микроструктуры динамики активов и частот торгов на Российском фондовом рынке: автореф. на соискание учёной степени канд. эконом.наук / Пырклик Владимир Николаевич. – Новосибирский институт экономики и организации промышленного производства СО РАН. – 25 с.

6. Шакин Д.А. Высокочастотные данные на российском рынке ценных бумаг / Д.А. Шакин. – М.: Изд. Российской школы экономики, 2003. – 37 с.

7. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

8. Мащенко О.М. Наукові засади забезпечення економічної рівноваги ресурсних ринків (на прикладі воднихресурсів) / О.М. Мащенко // Вісник Сумського державного університету. Сер. «Економіка». – 2009. - №2. – С. 35-41.

9. Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Данилов, Г.П. Филей; отв. ред. В.С. Будник. – К.: Наукова думка, 1992. – 252 с.

10. Michael Van Hauwermeiren. A Compendium of Distribution / Michael Van Hauwermeiren, David Vose. – Jonn-Wiley and sons, 2008. – 176р.

Поступила в редколлегию 19.04.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Н. Герасин, Харьковский институт банковского дела, Харьков.

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛІВ БРЕДФОРДА, БАРРА І ДАГУМА МЕТОДОМ МАКСИМУМУ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

В.Ю. Дубницький, О.Є. Петренко

Отримані рівняння методу максимуму правдоподібності для оцінки параметрів форми, положення і масштабу для розподілів Бредфорда (Bradford), Барра (Burr) і Дагума (Dagum).

Ключові слова: *розподіл Бредфорда, розподіл Барра, розподіл Дагума, метод максимуму правдоподібності.*

EVALUATION OF DISTRIBUTION PARAMETERS OF BRADFORD, BURR AND DAGUM BY METHOD OF THE MAXIMUM PROBABILITY

V.Y. Dubnitskii, O.E. Petrenko

The equations are found of method of the maximum probability maximum likelihood for the estimation of parameters, forms, position and scale for distributions of Bradford, Burr and Dagum.

Keywords: *distributing of Bradford, distributing of Bar, distributing of Dagum, method of the maximum probability.*