УДК 519.3

А.И. Зинченко

Запорожский национальный университет, Запорожье

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОДНОРЯДНОМ РЕГУЛЯРНОМ РАСКРОЕ ЛИСТА НА ТРЕУГОЛЬНИКИ

В статье получена аналитическая формула для подсчета количества треугольников, которые можно разместить на прямоугольном листе заданных размеров, в случае если размещение является регулярным и однорядным. В качестве параметров, задающих треугольник, взяты радиус описанной окружности и углы, которые образуют векторы с началом в центре описанной окружности и концами в вершинах треугольника с одной из сторон листа. Полученные результаты использованы для тестирования программы, предназначенной для поиска оптимального раскроя и разработанной автором.

Ключевые слова: *регулярный раскрой, коэффициент использования материала, треугольник, описанная окружность, уравнение прямой.*

Введение

Одним из способов снижения себестоимости продукции является более экономное использование материала. Если речь идет о массовом производстве, в котором используется листовой прокат, то одной из технологических операций является штамповка. Лист разрезается на полосы, из которых штампуются однотипные детали. В связи с тем, что переориентация штампа занимает достаточно много времени, обычно штамп совершает только вертикальные движения, а полоса листового металла двигается поступательно. Получается, что штампуемые фигуры одинаково ориентированы относительно сторон листа. В этом случае говорят о регулярной однорядной штамповке.

При таком виде штамповки количество фигур, которые можно расположить на листе, зависит (при заданной геометрии фигуры) только от угла поворота штампуемых фигур относительно листа. Как правило, подбор оптимального угла осуществляется с помощью специализированных программ.

При тестировании таких программ, естественно, возникает вопрос о достоверности получаемых результатов. Наиболее надежным способом доказательства достоверности является сравнение с решениями, полученными аналитически. Однако для задач регулярного раскроя такие решения неизвестны.

Это связано с тем, что функция, описывающая коэффициент использования материала, во-первых, сложным образом зависит от геометрии фигуры и размеров листа, а во-вторых, является кусочнопостоянной с большим количеством горизонтальных участков.

В данной работе изучается вопрос о вычислении коэффициентов использования материала при регулярном однорядном размещении однотипных фигур в прямоугольной области.

Такие задачи обычно решаются методами компьютерного моделирования. В их разработке принимали участие такие ученые, как Л.В. Канторович, В.А. Залгаллер [1], В.Л. Рвачев [2], Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль [3], Э.А. Мухачева[4], Л.Б. Белякова [5] и другие.

Наиболее известным пакетом, в котором есть модуль для решения этой задачи, является TFLEX. Принципы функционирования этого модуля описаны, в частности, в электронной статье [6]. Авторами А.К. Приварниковым и А.И. Зинченко также была разработана программа и оболочка для решения задач регулярного раскроя прямоугольных листов на однотипные детали [7]. Алгоритм работы программы описан в [8]. Однако применяемые в программах такого рода алгоритмы являются переборными, то есть они вычисляют количество размещаемых фигур при некоторых углах поворота фигур, и из них выбирают угол, соответствующий максимуму.

Автору не известны результаты, которые касаются аналитических решений задач такого плана. Это связано с тем, что графики зависимости количества размещенных фигур от угла являются кусочно-постоянными и аппарат дифференциального исчисления для них непригоден. Полученные в этой статье результаты для простейших фигур с угловыми точками – треугольников могут служить тестовыми для оценки надежности соответствующих программ.

Основная часть

При регулярном однорядном размещении однотипных фигур на листе под коэффициентом использования материала (КИМ) понимают величину

$$K = \frac{nS}{R}, \tag{1}$$

где S – площадь фигуры; n – количество фигур, полностью размещенных на листе при данном способе укладки; R – площадь листа.

Рассмотрим регулярное размещение треугольников в прямоугольном листе длиной a и шириной b (рис. 1).

Расположим заданный треугольник $A_1A_2A_3$ каким-то образом на координатной плоскости OXY так, чтобы начало системы координат в точке O находилось в центре описанной окружности. Обозначим радиус описанной окружности через r. Пусть полярные координаты вершины $A_i(r, \psi_i)$, а декартовы координаты точек A_i тогда будут равны соответственно $(r\cos\psi_i, r\sin\psi_i)$. После поворота фигуры на угол τ вершины соответственно переместятся в точки $B_i(r\cos\varphi_i, r\sin\varphi_i)$, где $\varphi_i = \psi_i + \tau$.

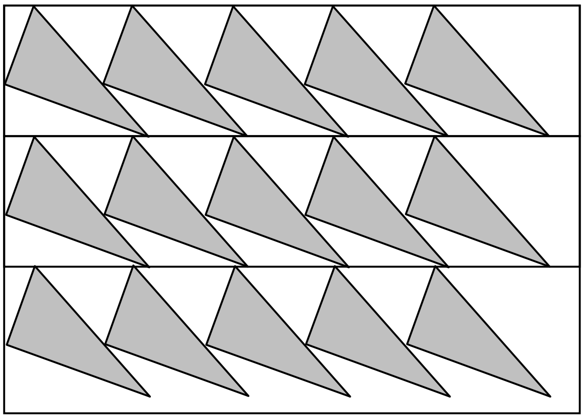

Рис. 1. Однорядное регулярное размещение треугольников в листе

Введем обозначения: h – габарит фигуры по вертикали, m – габарит фигуры по горизонтали, d –- длина фигуры по горизонтали (то есть длина максимального отрезка, параллельного горизонтальной оси, концы которого лежат на границах фигуры), S – площадь треугольника (рис. 2).

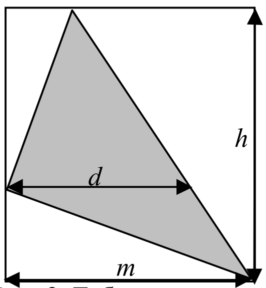

Рис. 2. Габариты и длина треугольника

Количество полос, на которые разрезается лист, равно $[b/h]$. Минимальная длина листа, при которой можно разместить одну фигуру, равна $a = m$. Для размещения каждой следующей фигуры минимальную длину листа нужно увеличить на величину d. То есть, например, $k+1$ фигуру можно разместить только тогда, когда $a \ge m + kd$. В случае, если $a \ge m + (k+1)d$, в полосе можно разместить более чем k фигур. Объединяя эти рассуждения в одну формулу, получаем, что количество фигур в каждой полосе равно $1 + [(a-m)/d]$. Следовательно

$$\text{КИМ} = \frac{S[b/h]\cdot\left(1+[(a-m)/d]\right)}{ab}. \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению величин h, m, d.

Габарит по вертикали равен максимальной разности ординат вершин треугольника, т.е.

$$h = r \cdot \max\{|g_{12}|, |g_{13}|, |g_{23}|\}, \tag{3}$$

где $g_{ij} = \sin\varphi_i - \sin\varphi_j$.

Аналогично, габарит по горизонтали равен максимальной разности абсцисс вершин треугольника

$$m = r \cdot \max\{|p_{12}|, |p_{13}|, |p_{23}|\}, \qquad (4)$$

где $p_{ij} = \cos\varphi_i - \cos\varphi_j$.

Перейдем к определению величины d. Определим величину $d_j = |B_j C_j|$, где C_j – точка пересечения прямой, параллельной оси OX, проходящей через точку B_j, и прямой $B_i B_k$ (здесь $i \neq j, i \neq k, j \neq k$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$).

Найдем координаты точки $C_j(x_c, y_c)$.

Уравнение прямой $B_i B_k$ имеет вид

$$\frac{x - r\cos\varphi_k}{r\cos\varphi_i - r\cos\varphi_k} = \frac{y - r\sin\varphi_k}{r\sin\varphi_i - r\sin\varphi_k}.$$

Поскольку $y_B = y_j = r\sin\varphi_j$, то

$$x_c = r\cos\varphi_k + r(\cos\varphi_i - \cos\varphi_k)\frac{\sin\varphi_j - \sin\varphi_k}{\sin\varphi_i - \sin\varphi_k}.$$

Окончательно будем иметь

$$d_j = |x_j - x_c| = r\left|p_{jk} - p_{ik}\frac{g_{jk}}{g_{ik}}\right|. \qquad (5)$$

Используя тот факт, что $d = \min\limits_{1 \le j \le 3} d_j$, получаем, что

$$d = r \cdot \min\{f_{12}, f_{13}, f_{23}\}, \qquad (6)$$

где

$$f_{jk} = \left|p_{jk} - p_{ik}\frac{g_{jk}}{g_{ik}}\right|. \qquad (7)$$

Таким образом, КИМ вычисляется по явной формуле (2), в которой величины $h(\tau), m(\tau), d(\tau)$ определяются выражениями (3), (4), (6), (7).

Примеры решения задач

Поскольку при решении задачи о регулярной однорядной укладке на листе КИМ пропорционален количеству фигур, то на графиках (рис. 3, 4) приведена зависимость количества фигур на листе от угла поворота.

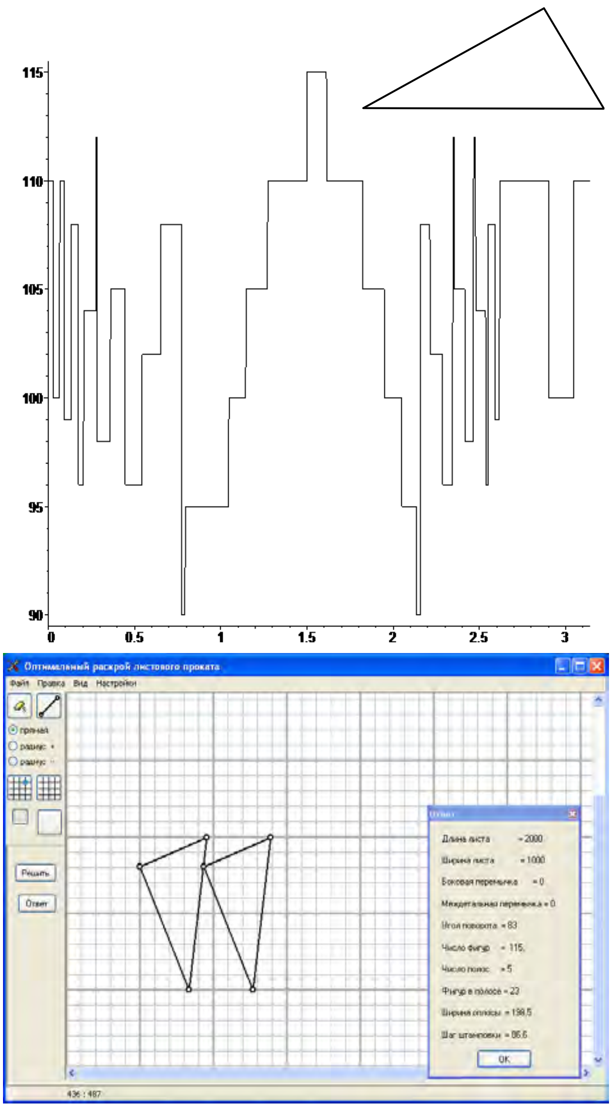

Рис. 3. Оптимальное положение треугольников первого вида, определенное с помощью программы PRIZ

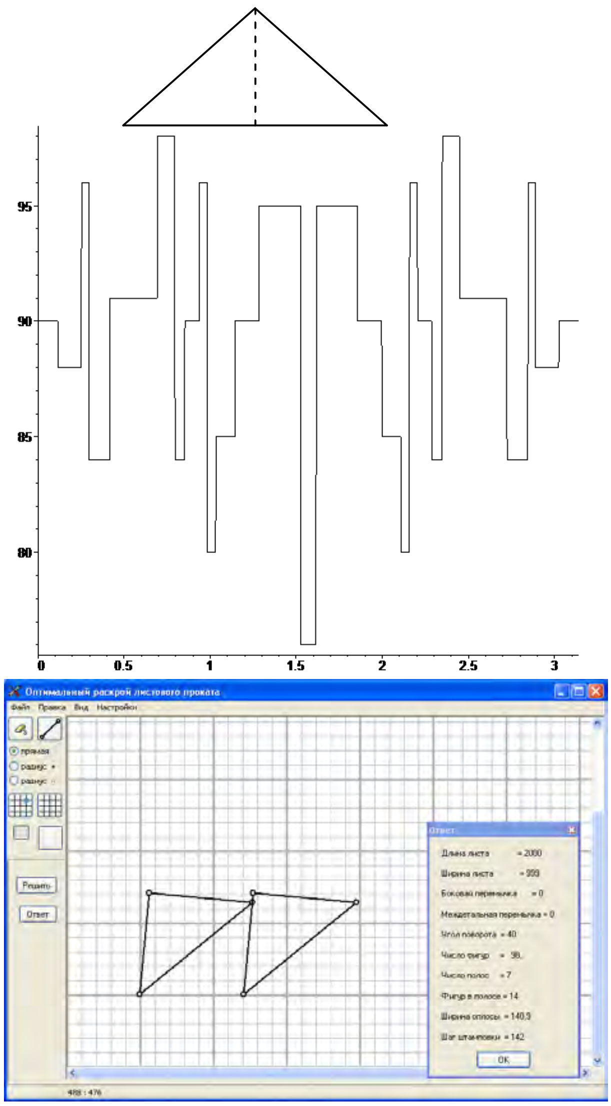

Рис. 4. Оптимальное положение треугольников второго вида, определенное с помощью программы PRIZ

График на рис. 3 строился при следующих значениях параметров:

$$a = 20, b = 10 .$$

Рассматривалось два вида треугольников.

Первый треугольник с параметрами

$$r = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/3, \varphi_3 = \pi ,$$

стороны которого $2, \sqrt{3}$ и 1.

Второй треугольник с параметрами

$$r = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2, \varphi_3 = \pi ,$$

стороны которого $2, \sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.

При этих же данных проводился расчет с помощью программы, созданной автором статьи [7]. На рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов.

Как видим, оптимальное количество фигур и углы поворота, определенные по приведенным выше графикам и с помощью программы, совпадают, что свидетельствует о достоверности результатов.

Выводы

В данной работе впервые в литературе построена аналитическая зависимость количества треугольников, которые можно разместить в прямоугольном листе с заданными размерами при однорядной регулярной укладке, от угла поворота треугольников относительно сторон листа.

Для решения этой задачи треугольник задается радиусом описанной окружности и углами, под которыми видно его стороны из центра этой окружности. Использован аппарат аналитической геометрии и сведения из школьного курса математики.

Полученные результаты могут служить для проверки правильности работы компьютерных программ, посвященных численному решению задач регулярного однорядного раскроя.

Список литературы

1. Канторович Л.В. Рациональный раскрой промышленных материалов / Л.В. Канторович, В.А. Залгаллер. – Новосибирск: Наука, 1971. – 299 с.

2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

3. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К.: Наукова думка, 1976. – 247с.

4. Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ / Э.А. Мухачева. – М: Машиностроение, 1984. – 176 с.

5. Белякова Л.Б. Проектирование на ЭВМ оптимального раскроя заготовок при листовой штамповке сложных форм / Л.Б. Белякова, Н.О. Рябина // Кузнечно-штамповочное производство. – 1977. – № 11. – С. 25-28.

6. Электронный ресурс. – Режим доступа к ресурсу: http://www.sapr.ru/article.aspx?id=7219&iid=295.

7. А.с. Комп'ютерна програма пошуку оптимального варіанта однорядного прямого розкрою "Priz"/ А.І. Зінченко, А.К. Приварников. – № 22986; дата реєстрації 03.12.2007.

8. Зинченко А.И. Алгоритм регулярного размещения однотипных фигур в прямоугольном листе / А.И. Зинченко, А.К. Приварников // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – № 1. – С. 34-38.

Поступила в редколлегию 29.04.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.К. Приварников, Запорожский национальный университет, Запорожье.

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ ОДНОРЯДНИЙ РЕГУЛЯРНИЙ РОЗКРІЙ ЛИСТА НА ТРИКУТНИКИ

А.І. Зінченко

У статті отримана аналітична формула для підрахунку кількості трикутників, які можна розмістити на прямокутному листі заданих розмірів, у випадку коли розміщення є регулярним і однорядним. У якості параметрів, що задають трикутник, обрано радіус описаного кола та кути, які утворюються векторами з початком у центрі описаного кола й кінцями у вершинах трикутника з однією зі сторін листа. Отримані результати використані для тестування розробленої автором програми, призначеної для пошуку оптимального розкрою.

Ключові слова: *регулярний розкрій, коефіцієнт використання матеріалу, трикутник, описане коло, рівняння прямої.*

ANALYTICAL SOLUTION FOR THE PROBLEM OF THE OPTIMAL SINGLE-ROW REGULAR CUTTING INTO THE TRIANGLES

A.I. Zinchenko

The formula for the calculation of the number of triangles which can be placed on a rectangular sheet of metal of the given sizes, for the regular single-row placing has been obtained. The triangle is determined by radius of the circumscribed circle and angles between the vectors, which join the center of this circle and the vertices of the triangle, and the side of the sheet. The obtained results have been used to test the program, developed by the author. This program deals with the finding of the optimal cutting.

Keywords: *regular cutting, material utilization ratio, triangle, circumscribed circle, the equation of the line.*