УДК 519.816

Н.М. Кораблев

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА ПРИОРИТЕТОВ ПРИЗНАКОВ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ НЕПОЛНЫХ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Рассматривается метод извлечения экспертных знаний на основе организации процедуры неполных парных сравнений, который реализуется в удобной для эксперта форме, значительно упрощает процесс и сокращает сроки проведения экспертной процедуры. Предложены методы определения вектора приоритетов признаков по неполной матрице парных сравнений на основе определения пропущенных значений либо приведения ее к системе линейных уравнений.

Ключевые слова: *извлечение, процедура, вектор, матрица, признак, парные сравнения, субъективные оценки, альтернатива, граф, согласование, приоритет, экспертные знания.*

Введение

Формирование управляющих решений в большинстве случаев сводится к задаче выбора на множестве альтернатив [1], одним из наиболее эффективных методов решения которой является метод анализа иерархий [2]. Исходными данными задачи являются субъективные оценки, представленные в виде отношений предпочтения сравниваемых вариантов выбора (альтернатив). Как правило, для оценки относительной приоритетности основных показателей множества сравниваемых признаков используется матрица парных сравнений (МПС) [3]. Однако метод парных сравнений не всегда может быть эффективно применен в некоторых практических ситуациях [2 – 4]:

1. Для построения полной матрицы парных сравнений (МПС) требуется $n(n-1)/2$ парных сравнений. В этом случае построение однородных МПС становится затруднительным, что связано с физическими ограничениями интеллекта человека.

2. При добавлении новых альтернатив изменяется порядок ранее прошедших сравнение альтернатив относительно критериев качества. Нарушение порядка альтернатив нежелательно при решении ряда практических задач, связанных со значительными затратами на корректировку последствий принимаемых решений или возможностью возникновения конфликтной ситуации между экспертами, готовящими и обосновывающими решения.

3. Альтернативы могут поступать эксперту не одновременно, а через определенные промежутки времени. Поэтому не всегда представляется возможным попарно сравнить все объекты.

Решение проблемы сравнения и оценки альтернатив в указанных ситуациях возможно проводить тремя способами:

1) использование метода сравнения альтернатив относительно стандартов [5, 6];

2) организация процедуры полных парных сравнений;

3) организация процедуры неполных парных сравнений, позволяющей проводить вычисление векторов приоритетов альтернатив по сокращенному множеству парных сравнений.

В соответствии с первым способом стандарт устанавливает уровень качества объекта относительно критерия качества (например, критерий «форма заболевания» может характеризоваться тремя стандартами: «легкая», «средняя», «тяжелая»). Каждый стандарт отождествляется, как правило, с некоторым существующим на практике эталоном качества. Однако у данного подхода есть ряд недостатков. Во-первых, во многих случаях затруднительно правильно выделить стандарты. Во-вторых, бывает важным учитывать даже незначительное предпочтение по критериям одной альтернативы над другой.

При качественной исходной информации количественные значения приоритетов признаков можно получить, используя результаты субъективных относительных парных сравнений этих признаков по предпочтительности, представленных в виде полной матрицы парных сравнений. Для определения вектора приоритетов признаков на основе полной МПС наибольшее распространение получили метод наименьшие квадратов [7] и метод собственного вектора [3]. Недостатком метода наименьших квадратов является то, что с его помощью невозможно выполнить коррекцию полученных оценок с целью улучшения согласованности матрицы. Другим важным недостатком метода наименьших квадратов является его громоздкость.

При использовании метода собственного вектора результаты парного сравнения признаков по приоритетности описываются отношениями весов этих признаков и МПС представляет результаты такого парного сравнения. При этом элементы МПС обладают свойствами согласованности и непротиворечивости суждений. Но на практике элементы МПС, являющиеся результатами парных сравнений признаков по приоритетности, задаются на основе субъективных оценок эксперта, т.е. весьма неточно.

© Н.М. Кораблев

Но, в отличие от метода наименьших квадратов метод собственного вектора позволяет провести проверку согласованности экспертных оценок и выполнить коррекцию исходных сравнительных оценок предпочтительности признаков объектов. Недостатком этого подхода является необходимость учета всех признаков, что сопряжено со значительными материальными и временными затратами.

В этом случае более предпочтительным является определение вектора приоритетов признаков на основе процедуры неполных парных сравнений. Анализ литературы показал, что отсутствует методика извлечения экспертных знаний на основе проведения процедуры неполных парных сравнений и определение вектора приоритетов признаков по полученному множеству неполных парных сравнений.

В данной статье рассматривается метод извлечения экспертных знаний на основе организации процедуры неполных парных сравнений, реализуемый в удобной для эксперта форме, а также значительно упрощающий сам процесс и сроки проведения экспертной процедуры. Кроме того, рассматриваются методы определения вектора приоритетов признаков на основе определения пропущенных значений неполной матрицы парных сравнений либо приведения ее к системе линейных уравнений.

Постановка задачи. Пусть известно множество парных сравнений $A^{н}$, которое, возможно, не содержит все элементы обратно симметричной полной МПС A

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

в которой $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $a_{ij} = \mu_W(\omega_i)/\mu_W(\omega_j)$, $i = \overline{1,n}$; $\mu_W(\omega_i)$ – функция принадлежности признака ω_i нечеткому множеству W, n – количество признаков.

Предполагается, что согласованность матрицы $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$, определяемая в виде условия для элементов матрицы $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$, может быть нарушена, и значения компонент ее собственного вектора $\overline{U} = \{\mu_W(\omega_i)\}$, $i = \overline{1,n}$, могут быть определены приближенными числовыми значениями. Тогда и значения функций принадлежности признаков $\mu_W(\omega_i)$ нечеткому множеству W будут выражать приближенные значения.

Необходимо определить условия, при которых возможно восстановление вектора приоритетов признаков по неполной МПС, которая может быть несогласованной, и определить вектор приоритетов признаков.

Основной материал

Выделим необходимое условие, при котором возможно восстановление вектора приоритетов признаков по неполной МПС. Для этого рассмотрим граф $G(A^{н})$ с множеством вершин $(1, 2, ..., n)$, в котором вершины соединены ребром (i, j) тогда и только тогда, когда $A^{н}$ содержит элемент a_{ij} или a_{ji}.

Для решения данной задачи воспользуемся теоремой [8], в соответствии с которой вектор весов ω восстанавливается по множеству $A^{н}$ тогда и только тогда, когда граф $G(A^{н})$ связен. Следствием этой теоремы является то, что для восстанавливаемости вектора приоритетов признаков ω по множеству $A^{н}$ необходимо, чтобы $A^{н}$ содержало не менее $(n-1)$ элементов.

Для реализации этого способа предлагается новый алгоритм построения множества $A^{н}$. Откладываем на плоскости множество вершин, равное количеству сравниваемых альтернатив, приписывая каждой вершине имя альтернативы. Далее выбираем пару вершин (присвоим им номера), для которой легче всего оценить степень превосходства, строим граф $G(A^{н})$, состоящий из одной дуги. При этом дуга направлена от более предпочтительной альтернативы к менее предпочтительной (для альтернатив, имеющих равные предпочтения, дуга имеет обоюдное направление). Около дуги проставляется степень превосходства a_{ij} по шкале «$1 \div 9$» Т. Саати [2]. Таким образом, всегда имеем «вес» дуги $a_{ij} \geq 1$. На каждом последующем шаге выбираем две альтернативы, одна из которых (i) лежит в $G(A^{н})$, а другая – нет, присваиваем новой вершине номер j и добавляем в $G(A^{н})$ дугу (i, j) с присвоением ей степени предпочтения. Процедура продолжается до тех пор, пока не получим связный граф.

С позиции теории графов описанный алгоритм строит основное дерево во взвешенном полном графе и известно [8], что построенное таким образом дерево минимально по сумме длин входящих в него ребер. По построенному графу строится матрица неполных парных сравнений $A^{н}$. Для нахождения вектора приоритетов по построенной неполной матрице предлагается два новых способа:

1) с заполнением пропущенных значений и вычислением вектора приоритетов признаков;

2) преобразование исходной матрицы к специальному виду и нахождение векторов приоритетов признаков путем решения системы линейных уравнений.

Рассмотрим первый способ. Важным здесь является то, что в случае, когда оценки эксперта абсолютно согласованы, то строки МПС пропорциональны друг другу. Это видно, если представить МПС в виде таблицы (табл. 1). Если из каждой строки вынести множитель ω_i, $i=\overline{1,n}$, то получим n равных строк. Это говорит о том, что идеально согласованная МПС является вырожденной и каждая строка матрицы содержит не что иное, как ненормированный вектор приоритетов данной матрицы. При этом предполагаем, что построенная таким образом МПС имеет согласованность, близкую к идеальной (так как эксперт оценивал те пары альтернатив, относительно которых он может с достаточной достоверностью оценить их относительную предпочтительность).

Таблица 1

Вид согласованной матрицы парных сравнений

	A_1	A_2	...	A_n
A_1	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	…	$\frac{\omega_1}{\omega_n}$
A_2	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_2}$	…	$\frac{\omega_2}{\omega_n}$
...	...	...	...	...
A_n	$\frac{\omega_n}{\omega_1}$	$\frac{\omega_n}{\omega_2}$	…	$\frac{\omega_n}{\omega_n}$

Кроме этого установлена возможность использования для восстановления пропущенных значений МПС одного важного свойства, относящегося к связному графу: при числе вершин $n \ge 3$ в связном графе $G(A^н)$ найдется по крайней мере одна вершина, имеющая связь не менее, чем с двумя другими вершинами. Используя это свойство, можно восстанавливать пропущенные значения неполной МПС. Предположим, что такая вершина – вершина i – единственная (в МПС можно рассматривать как строки, так и столбцы), соединенная с вершинами j и k. Тогда в МПС определены элементы a_{ij} и a_{ik}. Зная эти элементы, значение a_{jk}, с учетом предположения о согласованности, может быть вычислено как $a_{jk} = a_{ik}/a_{ij}$. Если же элемент a_{jk} уже определен, то ищем такие a_{ij} и a_{ik}, для которых он не задан и определим его. Теперь вершины j и k (каждая) также имеют на графе соединения как минимум с двумя вершинами. Среди всех существующих пар $(a_{ij}, a_{ik}), i \ne j \ne k$ находим неопределенные значения и вычисляем их аналогично рассмотренному выше способу.

Этот способ вычисления неопределенных (отсутствующих) элементов оправдан, когда все парные сравнения из неполного набора согласованы между собой. Однако такая ситуация встречается крайне редко. В этом случае возникает неоднозначность определения отсутствующих элементов через определенные. Это тот случай, когда $a_{kl} = {a_{il}}/{a_{ik}} \ne {a_{jl}}/{a_{jk}} = a_{kl}$ и, если экспертные оценки плохо согласованы, то восстановление пропущенных элементов МПС может привести к еще большему искажению реальных предпочтений эксперта.

В такой ситуации предлагается метод нахождения вектора приоритетов по неполной МПС, согласно которому формируется система линейных уравнений $C\omega = e$, где ω есть искомый вектор весов, а квадратная матрица $C = \| c_{ij} \|$ порядка n и вектор e длины n определяются так: $c_{ij} = a_{ij}$, если $i < j$ и a_{ik} определено; c_{ij} равно взятому с обратным знаком числу таких индексов j, что $i < j$ и a_{ij} определено; $c_{nj} = 1$ для всех j; $c_{ij} = 0$ во всех остальных случаях; $e_i = 0$, если $i < n$; $e_n = 1$. Пусть $A^н$ обладает свойством $P = "\forall i < n \exists a_{ij} \in A^н$ с $j > i"$, т.е. любая из первых $(n-1)$ строк C содержит ненулевой недиагональный элемент.

Видно, что решение системы $C\omega = e$ удовлетворяет условию нормировки, единственно, положительно при любых положительных a_{ij} и совпадает с истинным вектором весов, если все a_{ij} оценены правильно, т.е. $a_{ij} = \omega_i/\omega_j$ для всех i, j. Поэтому можно рассматривать решение системы $C \ \ \omega = e$ в качестве решения исходной задачи нахождения вектора весов по множеству неполных парных сравнений $A^н$. Если же условие P не выполнено, то для некоторого i в i-й строке матрицы C все недиагональные элементы равны нулю и тогда, безотносительно к истинному значению ω_i, из i-го уравнения следует, что $\omega_i = 0$. Для того, чтобы это условие было выполнено, необходимо нумерацию вершин (оцениваемых объектов) при построении $G(A^н)$ рассмотренным выше способом проводить в порядке их вхождения в граф числом от n до 1. В этом случае каждая строка в неполной МПС будет содержать как минимум один ненулевой недиагональный элемент a_{ij} $(i < j)$.

Предлагаемый метод можно проиллюстрировать на примере нумерации для четырех вершин (рис. 1). На каждом шаге эксперт выбирает две альтернативы, оценивает их (проводит дугу от более предпочтительной к менее предпочтительной), проставляет степень предпочтения a_{ij} по шкале $(1 \div 9)$ Т. Саати [2] и нумерует вершины значениями от n до 1.

Для рассмотренного примера неполная МПС примет вид:

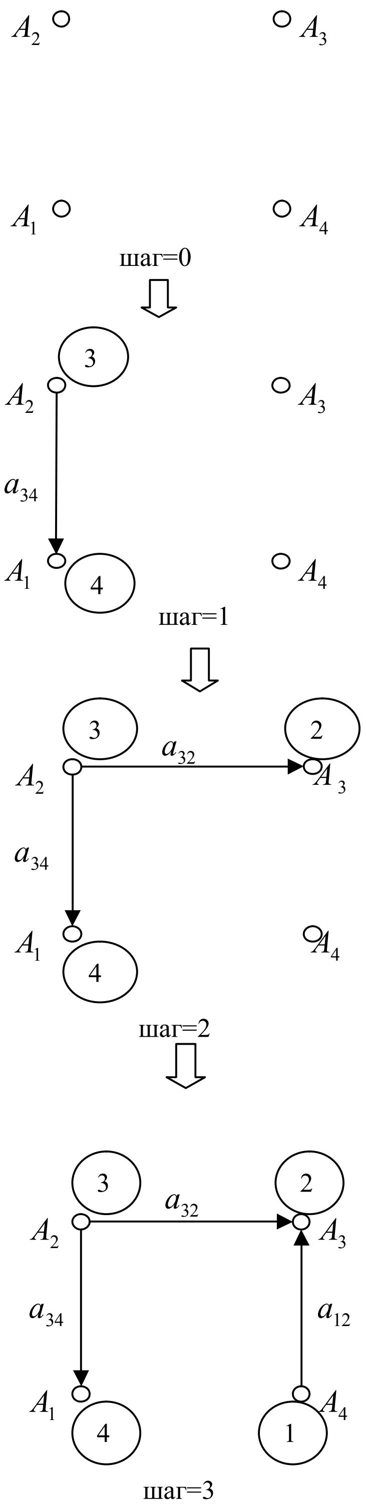

Рис. 1. Пример процесса определения предпочтений эксперта и нумерации альтернатив

	A_4	A_3	A_2	A_1
A_4	1	a_{43}	–	–
A_3	a_{34}	1	a_{32}	–
A_2	-	a_{23}	1	a_{21}
A_1	–	–	a_{12}	1

Отсюда согласно предложенному преобразованию матрица C примет вид:

	C_4	C_3	C_2	C_1
C_4	-1	c_{43}	0	0
C_3	0	-1	c_{32}	0
C_2	0	0	-1	c_{21}
C_1	1	1	1	1

Тогда имеем:

$$\begin{vmatrix} -1 & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_{21} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_4 \\ \omega_3 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Для нахождения вектора приоритетов необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -\omega_4 + a_{43} \quad \omega_3 = 0 \\ -\omega_3 + a_{32} \quad \omega_2 = 0 \\ -\omega_2 + a_{21} \quad \omega_1 = 0 \\ \omega_4 + \omega_3 + \omega_2 + \omega_1 = 1 \end{cases}. \qquad (2)$$

Таким образом, согласно предлагаемой процедуре извлечение экспертных данных осуществляется в удобной для эксперта форме а также значительно упрощается сам процесс и сроки проведения экспертной процедуры, особенно в случае, когда число сравниваемых альтернатив велико $(n > 5)$. В предельном случае число парных сравнений, достаточное для вычисления вектора приоритетов альтернатив уменьшается по сравнению с полной процедурой проведения парных сравнений в $n(n-1)/2:(n-1) = n/2$ раз. При этом, в силу того, что эксперт имеет возможность сравнивать между собой альтернативы, относительно которых можно определенно выразить свои предпочтения, исключая трудно сравнимые между собой пары альтернатив, вектор приоритетов признаков, построенный по более достоверной информации, будет отражать систему реальных предпочтений эксперта.

Выводы

В работе предложен метод извлечения экспертных знаний на основе организации процедуры неполных парных сравнений, реализуемый в удобной для эксперта форме, а также значительно упрощающий сам процесс и сроки проведения экспертной процедуры.

Предложены методы определения вектора приоритетов признаков на основе определения пропущенных значений неполной матрицы парных сравнений либо приведения ее к системе линейных уравнений.

Список литературы

1. Бондаренко М.И. Построение согласованных решений в многокритериальных: задачах оптимизации больших систем / М.И. Бондаренко и др. // Доклады РАН. – 1994. – Т.335, № 6. – С. 719-724.

2. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М: Радио и связь, 1993. – 315 с.

3. Саати Т. Аналитическое планирование / Т. Саати, К. Кернс. – М.: Мир, 1991. – 224 с.

5. Вагин В.Н. Методы извлечения и обобщения информации в больших базах данных / В.Н. Вагин, А.А. Федотов, М.В. Фомина // Известия РАН: Теория и системы управления. – 1999. – № 5. – С. 32-41.

6. Андрейчиков А.В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике / А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчикова. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 368 с.

7. Андрейчиков А.В. Интеллектуальные информационные системы / А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчикова. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 424 с.

8. Кораблев Н.М. Сравнительный анализ методов определения абсолютных приоритетов признаков при нечеткой исходной информации / Н.М. Кораблев, А.С. Непокупный, Алзин Ферас // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, 2005. – Вип. 9 (49). – С. 75-83.

9. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

Поступила в редколлегию 1.04.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Г. Удовенко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА ПРІОРИТЕТІВ ОЗНАК НА ОСНОВІ ПРОЦЕДУРИ НЕПОВНИХ ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ

М.М. Корабльов

Розглядається метод вилучення експертних знань на основі організації процедури неповних парних порівнянь, який реалізується в зручній для експерта формі, значно спрощує процес і скорочує терміни проведення експертної процедури. Запропоновані методи визначення вектора пріоритетів ознак за неповної матриці парних порівнянь на основі визначення пропущених значень або приведення її до системи лінійних рівнянь.

***Ключові слова:** вилучення, процедура, вектор, матриця, ознака, парні порівняння, суб'єктивні оцінки, альтернатива, граф, узгодження, пріоритет, експертні знання.*

DETERMINING THE VECTOR PRIORITY SIGNS ON THE BASIS OF PROCEDURE OF INCOMPLETE PAIRED COMPARISONS

N.M. Korabljov

We consider a method of extracting expert knowledge-based organization procedures incomplete paired comparisons, which is implemented in a convenient form of an expert, greatly simplifies and reduces the period of the expert procedure. Proposed methods for determining the vector of priorities signs of an incomplete matrix of pair wise comparisons based on the definition of missing values, or bring it to a system of linear equations.

***Keywords:** extraction, a procedure, vector, matrix, a trait paired comparison, subjective evaluation, an alternative, graph, matching priority, expertise.*