УДК 681.3

В.И. Барсов, Е.А. Сотник

*Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков*

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОДИКА СИНТЕЗА ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

*Предложена математическая модель и методика синтеза отказоустойчивой системы обработки информации и управления реального времени, функционирующей в полиномиальной модулярной системе счисления.*

***Ключевые слова**: математическая модель, система обработки информации и управления, полиномиальная модулярная система счисления, отказоустойчивость.*

## Введение

В настоящее время качество выполнения процедур обработки информации в конкретной предметной области во многом определяется выбранной математической моделью организации процесса обработки информации и реализованной на её основе информационной технологии. Существует ряд научных и практических видов деятельности, где можно столкнуться с необходимостью модулярной обработки информации, представленной в виде полиномов от одной или нескольких переменных. Во-первых, при использовании помехоустойчивого кодирования, при передаче или обработке цифровой информации (цифровая фильтрация, спектральный анализ с использованием ортогональных преобразований дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и быстрого преобразования Фурье (БПФ)). Во-вторых, при реализации криптографических преобразований в полях Галуа. В-третьих, при обработке информации, представленной в многозначных базисах (триплексные числа, кватернионы, бикватернионы пр.).

Арифметические модульные операции, выполняемые в модулярной системе счисления (МСС) над целыми числами и полиномами, целесообразно объединить вместе потому, что многие известные алгоритмы, работающие с целыми или натуральными числами в МСС, практически совпадают с алгоритмами, работающими с полиномами от одной переменной. Это выполняется не только для модульных операций сложения, вычитания и умножения, но и для более сложных операций в МСС. Так, определение остатка числа по произвольному модулю $m_i$ МСС равноценно вычислению полинома в точке. В этом случае представление натурального числа, заданного в позиционной системе счисления (ПСС) в виде кода МСС, эквивалентно представлению полинома его значениями одновременно в нескольких точках. Обратная операция перевода числа из МСС в число в ПСС эквивалентна интерполированию полинома. С этой точки зрения перспективным является применение полиномиальной модулярной системы счисления (ПМСС), определяемой над расширенным полем Галуа $GF(2^v)$, где v – положительное целое число [1].

В зависимости от класса решаемых задач полиномиальная МСС расширенного поля Галуа также позволяет варьировать точностью, быстродействием и информационной надежностью в процессе обработки информации, что определяется основными свойствами МСС.

Вышеуказанные особенности ПМСС, заключающиеся в возможности реализации обменных операций, представляют собой идеальную основу для разработки высокоэффективных методов реконфигурации системы обработки информации и управления (СОИУ) функционирующей в ПМСС [3]. В этом случае преимущества МСС реализуются наиболее полно, как в направлении обеспечения высокой отказоустойчивости, так и в направлении повышения производительности функционирования СОИУ.

Также ПМСС предполагает обработку комплексных чисел как единого целого, без разбиения на действительную и мнимую части, на основе использования первой фундаментальной теоремы Гаусса. Кроме этого существует возможность выполнения комплексных теоретико-числовых преобразований (ТЧП) на основе реализации модульных операций. Это позволяет вместо вычисления комплексного ТЧП использовать ТЧП над прямой суммой полей $GF(m_1^2)+...+GF(m_m^2)$, что даёт возможность распараллеливать вычисления на уровне арифметических операций, достигая минимальных временных и схемных затрат. Следует отметить, что арифметика Гаусса, базирующаяся на квадратичной МСС, обладает практически теми же достоинствами и недостатками, что и вещественная МСС. Однако, ограничения, накладываемые на модули квадратичной МСС, в значительной степени сокращают область применения модульной арифметики Гаусса [3].

Применение полиномиальной модульной арифметики, определяемой над расширенным полем Галуа $GF(2^v)$, позволяет, на основе специальных способов умножения полиномов, осуществлять вычисления больших сверток, путём замены их на последовательность коротких.

Очевидно, что система обработки информации, функционирующая в ПМСС расширенного поля Галуа, обладает свойством, позволяющим ей гибко использовать резервы точности и надежности при наличии ограничений на увеличение веса, габаритов и стоимости СОИУ.

Применение полиномиальной арифметики позволяет также осуществить распараллеливание вычислений на уровне микроопераций. Если исходные две последовательности дискретных отчетов x(nT) и u(nT) представить в полиномиальной форме, то операцию циклического свертывания можно свести к процедуре умножения этих полиномов. При этом вычисления циклической свертки двух последовательностей x(nT) и u(nT) равной длины N, эквивалентно нахождению коэффициентов полинома y(z) согласно выражения

$$y(z) \equiv x(z)u(z) \bmod z^N - 1,$$

где x(z) и u(z) – полиномиальная форма последовательностей x(nT) и u(nT) соответственно.

Для вычисления коротких сверток с использованием китайской теоремы об остатках двучлен $z^N - 1$ может быть представлен в виде произведения S круговых неприводимых полиномов

$$z^N - 1 = \prod_{i=1}^{S} p_i(z),$$

где S – число делителей N.

Можно выделить два основных направления использования ПМСС в СОИУ. Основу первого направления составляет применение ПМСС для построения отдельных узлов, выполняющих одну или несколько однотипных арифметических операций. В данном случае используется функционально законченное устройство с простым управлением, предназначенное для реализации конкретной базовой операции в реальном времени функционирования. Второе направление составляют разработки крупных и функционально сложных СОИУ, полностью функционирующих в ПМСС.

Поэтому представляется актуальным рассмотреть вопросы, связанные с разработкой математических моделей и методик создания отказоустойчивых и производительных СОИУ реального времени функционирующей в ПМСС.

**Цель статьи** – предложить и описать обобщенную математическую модель и методику синтеза отказоустойчивой и производительной СОИУ реального времени функционирующей в ПМСС, при заданной системе ограничений.

## Основной материал

Проведенные исследования теоретических основ и принципов построения системы обработки информации и управления, функционирующих в полиномиальной модулярной системе счисления, стали основой для разработки обобщённой математической модели отказоустойчивости таких систем, без потери производительности обработки информации. Данная модель основана на представлении информации в виде полиномов произвольной степени от одной переменной [3]. Рассмотрим основные этапы построения математической модели отказоустойчивости СОИУ функционирующей в ПМСС без потери производительности обработки информации.

На основе анализа основных характеристик и принципов построения СОИУ, требований, предъявляемых к качеству решения прикладной задачи, осуществляется выбор оптимального состава информационных оснований ПМСС. При этом учитывается, что достижимая точность зависит от размерности обрабатываемых операндов и от величины разрядной сетки устройства обработки информации.

Решение многих прикладных задач осуществляется в реальном времени, поэтому необходимость своевременного обнаружения отказов, сбоев или других причин появления ошибочных результатов требует введения контрольных и резервных оснований ПМСС.

Количество и величины контрольных и резервных модулей определяется в зависимости от принятой математической модели надежности устройства обработки информации. В качестве критериев оптимальности выбираются минимальные схемные затраты, необходимые для обеспечения требуемой точности обработки данных, без потери достоверности.

Тогда математическая постановка задачи решаемой на данном этапе имеет вид (1):

$$\begin{cases} V_{ПМСС}\left(\{p_i(z)\}\right) \to \min, \\ V_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}\right) \to \min, \\ Q_{ПМСС}\left(\{p_i(z)\}\right) \ge Q_{доп}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $V_{ПМСС}$ – схемные затраты, необходимые на реализацию СОИУ в ПМСС;

$Q_{ПМСС} = \prod_i m_i(z)$ – точность обрабатываемых данных в модулярном коде;

$Q_{доп}$ – предельно допустимая точность;

$p_i(z)$ – минимальные многочлены расширенного поля Галуа $GF(2^v)$.

Выражение (1) позволяет определить ансамбль рабочих $\left\{p_i^{п}(z)\right\}$ и избыточных (контрольных и резервных) оснований $\left\{p_i^{к+r}(z)\right\}$ модулярного кода ПМСС.

Далее на основе анализа известных алгоритмов прямого преобразования данных из позиционной системы счисления в ПМСС и обратного преобразования данных из ПМСС в ПСС осуществляется обоснование и выбор оптимальных методов перевода из позиционного кода в модулярный и обратно. По результатам сравнительного анализа эффективности соответствующих методов выполняется выбор и обоснование математических моделей прямого преобразования ПСС – ПМСС (2) и обратного преобразования данных из ПМСС в ПСС (3):

$$\begin{cases} V_{ПСС-ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, s_j\right) \to \min, \\ T_{ПСС-ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, s_j\right) \to \min, \\ Q_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, s_j\right) \ge Q_{доп}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} V_{ПМСС-ПСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l\right) \to \min, \\ T_{ПМСС-ПСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l\right) \to \min, \\ Q_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l\right) \ge Q_{доп}, \end{cases} \quad (3)$$

где $s_j \in S = \left[s_1, s_2, ..., s_x\right]$ –j-й алгоритм преобразования ПСС-ПМСС;

$u_l \in U = \left[u_1, u_2, ..., u_y\right]$ - l-й алгоритм преобразования ПМСС–ПСС;

T – временные затраты на реализацию преобразований.

Исходя из условия, что ошибки, вызванные отказами и сбоями, возникающими в трактах обработки информации СОИУ, не переходят из одного тракта в другой, это определяется основными свойствами МСС, математическая модель отказоустойчивой СОИУ, предполагающая использование оптимальных методов и алгоритмов обнаружения, диагностики и исправления ошибок в модулярном коде имеет вид (4):

$$\begin{aligned} & V_{кор}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, f_d\right) \to \min, \\ & T_{кор} \le T^{доп}{}_{кор}, \\ & N_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l, f_d\right) \ge N_{доп}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $V_{кор}$ – суммарные схемные затраты на выполнение операции поиска и коррекции ошибки;

$N_{доп}$ – предельно допустимое количество отказов;

$N_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l, f_d\right)$ – количество парируемых отказов с использованием $f_d$;

$f_d \in F = \left[f_1, f_2, ..., f_M\right]$ – совокупность допустимых методов и алгоритмов обнаружения и исправления ошибок в кодах ПМСС.

Окончательно, с учётом возможного выполнения обменных операций и реконфигурации, позволяющих СОИУ в ПМСС сохранять работоспособное состояние, за счет перераспределения или снижения в допустимых пределах основных показателей качества функционирования, математическая модель отказоустойчивости СОИУ реального времени, функционирующей в ПМСС, при заданной системе ограничений имеет следующий вид (5):

$$\begin{aligned} & P\left(A, \left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, s_j, u_l, f_d, o_a, \hat{u}_в, t\right) \to \max, \\ & T_{рек}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, s_j, u_l, f_d, o_a, \hat{u}_в\right) \le T_{доп}, \\ & Q_{рек}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, s_j, u_l, f_d, o_a, \hat{u}_в\right) \ge Q_{доп}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $T_{рек}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l, o_a, \hat{u}_в\right)$ – время выполнения задания СОИУ;

$Q_{рек}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+r}(z)\right\}, u_l, f_d, o_a, \hat{u}_в\right)$ – точность выполнения задания СОИУ;

А – исходное задание, представляющее набор процедур, реализуемых СОИУ в процессе обработки информации;

$\hat{u}_в \in \hat{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, ..., \hat{u}_m]$ – совокупность возможных методов и алгоритмов выполнения обменных операций;

$o_a \in O = \left[o_1, o_2, ..., o_п\right]$ – совокупность возможных методов реконфигурации.

Проведенные исследования теоретических основ и принципов построения СОИУ, функционирующих в ПМСС, были использованы для разработки методики синтеза отказоустойчивых СОИУ реального времени, представленной на рис. 1. При этом было использовано выражение (5), представляющее собой математическую модель процесса получения рациональной структуры отказоустойчивой и быстродействующей СОИУ, функционирующей в ПМСС. Основная цель разработки и применения такой методики – обеспечение максимальной отказоустойчивости СОИУ, реализующей параллельные вычисления в расширенных полях Галуа, при наличии ограничений на точность, скорость и достоверность обработки данных.

На первом этапе на основе сбора и структуризации исходной информации, анализа основных параметров, характеристик и принципов построения СОИУ, а также требований, предъявляемых к качеству решения прикладной задачи, осуществляется формирование информационного базиса, позволяющего выбрать единственно оптимальное решение по организации процесса обработки информации $w_e$ из множества возможных

$$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_E\},$$

при котором организация вычислений $P(w_e)$ полностью соответствовала бы параллельно-конвейерной структуре СОИУ $P(D)$. В этом случае математическая постановка задачи формулируется следующим образом:

$$w_{опт} \in W\left[w_e = w_{опт} \to P(w_e) \leftrightarrow P(D)\right].$$

Сбор, анализ и структуризация информации, формирование информационного базиса

⇓

Выбор оптимального схемного решения организации параллельно-конвейерной структуры ИУС $P(D)$ в МСС удовлетворяющих условию $w_{опт} \in W\left[w_e = w_{опт} \to P(w_e) \leftrightarrow P(D)\right]$

⇓

Выбор оптимального состава информационных, контрольных и резервных оснований ПМСС, по критерию минимальных схемных затрат, удовлетворяющих условию

$$Q_{ПМСС}\left(\{p_i(z)\}\right) \ge Q_{доп},\quad V_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}\right) \to \min,\quad V_{ПМСС}\left(\{p_i(z)\}\right) \to \min$$

⇓

Выбор и реализация методов прямого и обратного преобразования, удовлетворяющих условию

$$V\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, s_j\right) \to \min,\quad T\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, s_j\right) \to \min,\quad Q\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}\right) \ge Q_{доп}$$

⇓

Выбор и реализация методов обнаружения, диагностики и исправления ошибок и определения позиционной характеристики модулярного кода, удовлетворяющих условию

$$V_{кор}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, f_d\right) \to \min,\quad T_{кор} \le T^{доп}{}_{кор},\quad N_{ПМСС}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, u_l, f_d\right) \ge N_{доп}$$

⇓

Выбор и реализация методов построения отказоустойчивой СОИУ реального времени в ПМСС, учитывающих возможность выполнения обменных операций и операций реконфигурации структуры СОИУ с перераспределением вычислительных ресурсов, при заданной системе ограничений

$$P\left(A, \left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, s_j, u_l, f_d, o_a, ы_в, t\right) \to \max,\quad T_{рек}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, s_j, u_l, f_d, o_a, ы_в\right) \le T_{доп},$$

$$Q_{рек}\left(\left\{p^{п}(z), p^{к+г}(z)\right\}, s_j, u_l, f_d, o_a, ы_в\right) \ge Q_{доп}$$

⇓

Структуры отказоустойчивой и производительной СОИУ реального времени, функционирующей в ПМСС, удовлетворяющие заданным ММ и системе ограничений

⇓

Анализ, систематизация и структуризация полученных оптимальных решений построения надёжностных структур отказоустойчивой и быстродействующей СОИУ реального времени, функционирующей в ПМСС. Формирование базы знаний, базы данных и СУБЗ, СУБД

Рис. 1. Методика синтеза отказоустойчивой СОИУ реального времени в ПМСС

Последующие основные этапы синтеза СОИУ в ПМСС будут аналогичны основным этапам разработки обобщённой математической модели отказоустойчивости СОИУ в ПМСС:

– выбирается оптимальный состав информационных, контрольных и резервных оснований ПМСС, по критерию минимальных схемных затрат;

– выбираются и реализуются методы прямого и обратного преобразования данных;

– выбираются и реализуются методы обнаружения, диагностики и исправления ошибок и определения позиционной характеристики модулярного кода;

– выбираются и реализуются методы построения отказоустойчивой СОИУ реального времени в ПМСС, учитывающие возможность выполнения обменных операций и операций реконфигурации структуры СОИУ с перераспределением вычислительных ресурсов, при заданной системе ограничений;

– разрабатываются варианты структуры отказоустойчивой и производительной СОИУ реального времени, функционирующей в ПМСС, удовлетворяющие заданным моделям и системе ограничений.

На заключительном этапе, с целью формирования баз данных и знаний, проводится анализ систематизация и структуризация полученных оптимальных решений построения структур отказоустойчивой и производительной СОИУ реального времени, функционирующей в ПМСС, для их последующего многократного использования.

В качестве примера, с использованием предложенной методики синтеза, была разработана структурная схема отказоустойчивой и производительной СОИУ реального времени функционирующей в ПМСС (рис. 2).

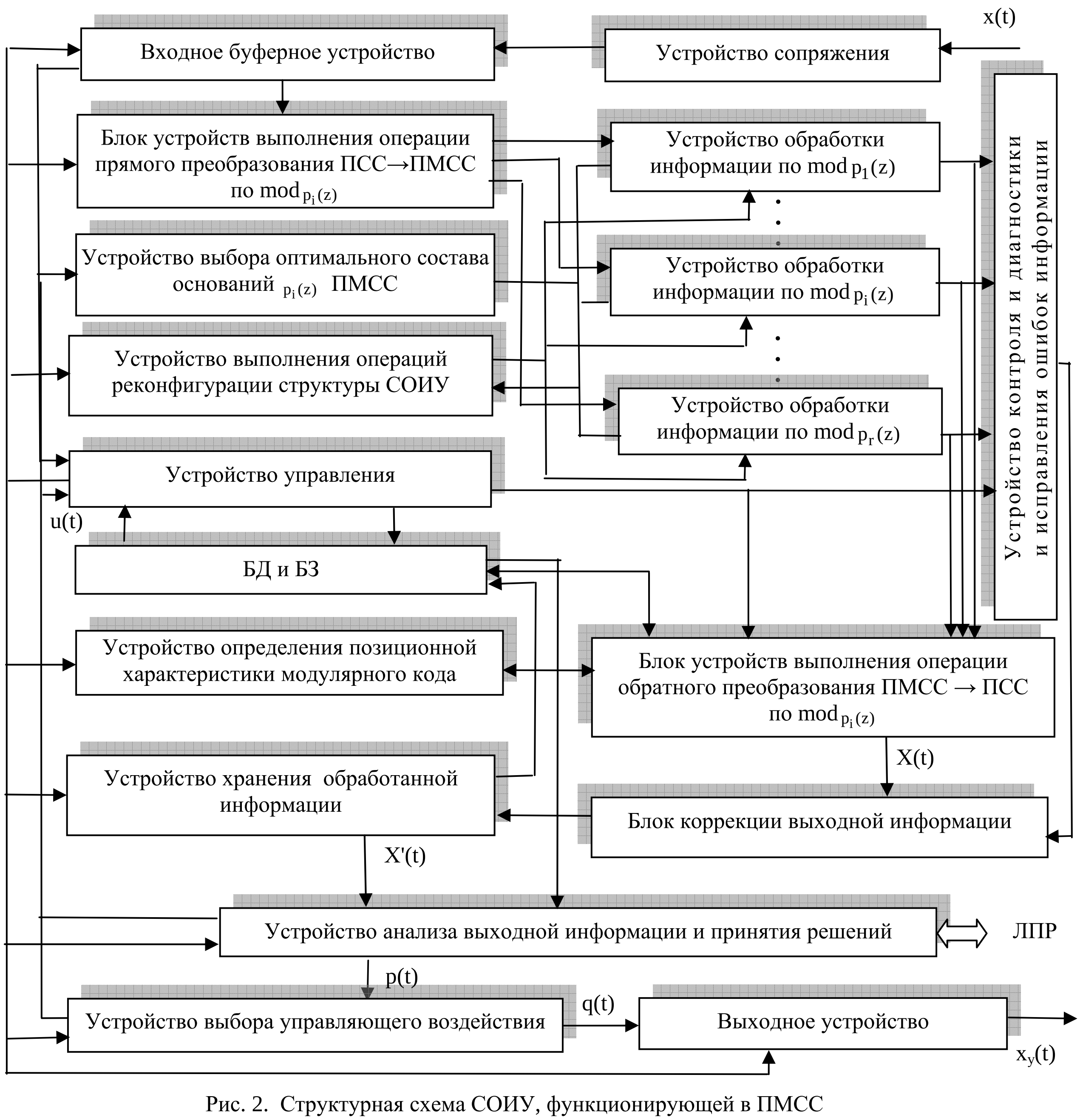


Рис. 2. Структурная схема СОИУ, функционирующей в ПМСС

## Выводы

1. Существующие разработки в теории и практике использования ПМСС обеспечивают потенциальную возможность повышения не только производительности, но и надежности СОИУ в целом. Применение ПМСС позволяет в максимальной степени использовать все преимущества параллельно-конвейерной организации вычислений, что в рамках существующих ограничений на массогабаритные характеристики способствует увеличению функциональных возможностей СОИУ.

2. Предложенная обобщённая математическая модель и разработанная на её основе методика синтеза отказоустойчивой и производительной СОИУ реального времени, функционирующей в ПМСС, позволяют синтезировать, по сравнению с ранее известными, более надежные СОИУ, реализующие параллельные вычисления в расширенных полях Галуа, при наличии ограничений на точность, скорость и достоверность обработки данных.

3. Использование предложенной математической модели и методики синтеза производительной и отказоустойчивой СОИУ предполагает дальнейшую разработку эффективных моделей, методов и алгоритмов обработки цифровой информации в ПМСС.

## Список литературы

1. *Методы многоверсионной обработки информации в модулярной арифметике: моногр. / [В.И. Барсов, В.А. Краснобаев, А.А. Сиора, И.В. Авдеев]. – Х.: МОН, УИПА, 2008. – 460 с.*

2. *Модели и методы повышения отказоустойчивости и производительности управляющих вычислительных комплексов специализированных систем управления реального времени на основе применения непозиционных кодовых структур модулярной арифметики: моногр. / [В.И. Барсов, Л.С. Сорока, В.А. Краснобаев, Хери Али Абдуллах]. – Х.: МОН, УИПА, 2008. – 147 с.*

3. *Барсов В.И. Методология параллельной обработки информации в модулярной системе счисления: моногр. / В.И. Барсов, Л.С. Сорока, В.А. Краснобаев – Х.: МОН, УИПА, 2009. – 288 с.*

4. *Система обработки информации и управления АСУ ТП на основе применения кодов в модулярной арифметике: моногр. / [В.И. Барсов, В.А. Краснобаев, И.А. Фурман и др.]. – Х.: МОН, УИПА, 2009. – 159 с.*

5. *Модели и методы параллельной реализации логических операций в АСУ ТП: моногр. / [В.И. Барсов, В.А. Краснобаев, И.А. Фурман, и др.]. – Х.: МОН, УИПА, 2009. – 138 с.*

6. *Барсов В.І. Методологічні засади створення інформаційної технології побудови відмовостійких систем обробки інформації і управління, що функціонують в модулярній системі числення / В.І. Барсов // Системи озброєння і військова техніка: науковий журнал. – 2010. – № 3 (23). – С. 65-71.*

*Поступила в редколлегию 3.06.2011*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков.

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОДИКА СИНТЕЗУ ВІДМОВОСТІЙКОЇ І ПРОДУКТИВНОЇ СИСТЕМИ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ ТА УПРАВЛІННЯ, ЩО ФУНКЦІОНУЄ В ПОЛіНОМіАЛЬНІЙ МОДУЛЯРНІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ

В.І. Барсов, Є.О. Сотник

*Запропоновано математичну модель і методику синтезу відмовостійкої системи обробки інформації та управління реального часу, що функціонує у поліноміальній модулярній системі числення.*

***Ключові слова:*** *математична модель, система обробки інформації та управління, поліноміальна модулярна система числення, відмовостійкість.*

### MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SYNTHESIS OF FAULT-TOLERANT AND PERFORMANCE INFORMATION PROCESSING AND MANAGEMENT, OPERATING WITHIN MODULAR POLYNOMIAL RADIX

V.I. Barsov, Ye.A. Sotnik

*It's offered a mathematical model and method of synthesis steady to the refuses system treatment of information and management in the real time that functioning in the polynomial modular number system.*

***Keywords:*** *mathematical model, system of treatment of information and management, polynomial modular number system, faulttolerance.*