УДК 621.396.253

А.А. Кузнецов[1], А.А. Смирнов[2], В.Н. Сай[3]

[1] *Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков*
[2] *Кировоградский национальный технический университет, Кировоград*
[3] *Научный центр боевого применения РВиА Сумского государственного университета, Сумы*

ФОРМИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ С МНОГОУРОВНЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ КОРРЕЛЯЦИИ

Предложен метод алгебраического формирования больших ансамблей дискретных сигналов с многоуровневой функцией корреляции на основе сечения ненулевых циклических орбит группового кода. Получены аналитические оценки корреляционных и ансамблевых свойств формируемых последовательностей. Установлено, что характеристики формируемых ансамблей сигналов (число и величина уровней боковых лепестков, мощность ансамбля последовательностей) зависят от свойств используемого группового кода. Разработаны предложения по реализации устройств формирования сигналов, получены оценки эффективности их использования в системах радиосвязи с множественным доступом.

Ключевые слова: *дискретные сигналы, многоуровневая функция корреляции, конечные поля, двоичный групповой код.*

Введение

Перспективным направлением качественного совершенствования современных систем управления, в том числе и в вооруженных силах, является цифровизация систем связи, разработка и исследование новых методов и принципов организации связи на основе использования больших ансамблей сложных сигналов с улучшенными корреляционными и структурными свойствами [1, 2]. Одним из направлений в развитии методов синтеза дискретных сигналов с многоуровневой функцией корреляции является подход, основанный на использовании алгебраических и структурных свойств групповых кодов [3, 4]. В данной работе исследуются алгебраические и структурные свойства групповых кодов, разрабатывается метод формирования больших ансамблей сложных дискретных сигналов на основе алгебраического сечения циклических орбит группового кода.

Алгебраическое формирование дискретных сигналов

Рассмотрим структуру конечного поля $GF\left(q^m\right)$ как множество многочленов степени $\le m$ с коэффициентами из $GF(q)$, т.е. структуру кольца многочленов $GF(q)[x]/\left(x^m-1\right)$. В соответствии с общими положениями теории полей Галуа кольцо многочленов $GF(q)[x]/\left(x^m-1\right)$ с операциями по модулю неприводимого многочлена является расширенным полем Галуа $GF\left(q^m\right)$. Такое поле состоит из совокупности циклотомических классов $\alpha^{i\left(q^s\right)}$, $s=0,1,...,m_i-1$, где m_i - наименьшее положительное целое, такое, при котором выполняется равенство [5]: $iq^{m_i}=(i)\mathrm{mod}\left(q^m-1\right)$. Каждый циклотомический класс элементов задает (через корни) минимальный многочлен $f_i(x)$. Произведение всех минимальных многочленов $f_i(x)$ конечного поля $GF(q^m)$ задает многочлен $(x^{q^m-1}-1)$, т.е. имеем равенство:

$$(x^{q^m-1}-1)=\prod_{\forall i\in\{0,...,q^m-1\}} f_i(x)=\prod_{\forall i\in\{0,...,q^m-1\}}\left(x-\alpha^i\right),$$

где α – примитивный элемент поля $GF(q^m)$.

Единственный приведенный ненулевой многочлен $g(x)$ наименьшей степени $r=n-k$ однозначно задает (n,k,d) циклический код над $GF(q)$ и обозначается порождающим многочленом, причем $g(x)=\prod_i(x-\beta^i)$, где $\beta^i\in GF\left(q^m\right)$. Он связан с проверочным многочленом $h(x)$ соотношением $g(x)\cdot h(x)=x^n-1$, или, что эквивалентно, $R_{x^n-1}\left[g(x)\cdot h(x)\right]=0$. Следовательно, имеем:

$$g(x)=\text{Н.О.К.}\left(\prod_j f_j(x)\right)=\text{Н.О.К.}\left(\prod_j\prod_{s=0}^{m_j}\left(x-\alpha^{j\left(q^s\right)}\right)\right),$$

$$h(x)=\frac{x^n-1}{g(x)}=\text{Н.О.К.}\left(\prod_{i\ne j}f_i(x)\right)=$$

$$= \text{Н.О.К.}\left(\prod_{i \neq j}\prod_{s=0}^{m_i}\left(x - \alpha^{i\left(q^s\right)}\right)\right). \quad (1)$$

Рассмотрим структуру группового (n, k, d) кода V над $GF(q)$ с точки зрения циклических свойств образующих его последовательностей. Будем использовать при этом понятие *циклической орбиты* V_ξ – множество последовательностей с элементами из $GF(q)$, эквивалентных друг другу относительно операции циклического сдвига, т.е. множество таких

$$C_i = \left(c_0^i, c_1^i, \ldots c_{n-1}^i\right),\ c_v^i \in GF(q)$$

и

$$C_j = \left(c_0^j, c_1^j, \ldots c_{n-1}^j\right),\ c_v^j \in GF(q),$$

что выполняется равенство:

$$\left(c_0^i, c_1^i, \ldots c_{n-1}^i\right) = \\ = \left(c_{(\tau)\bmod(n)}^j, c_{(\tau+1)\bmod(n)}^j, \ldots c_{(\tau+n-1)\bmod(n)}^j\right) \quad (2)$$

для какого-либо $\tau \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Рассмотрим множество W всех n-последовательностей с элементами из $GF(q)$, которые образуют так называемый «полный код». Структура множества эквивалентна векторному пространству $GF^n(q)$ с покомпонентным сложением и умножением на скаляр. Разобьем все множество W на подмножества орбит V_0, $V_1, \ldots$, V_L, каждая из которых содержит совокупность последовательностей, эквивалентных друг другу относительно операции циклического сдвига.

Циклический код по определению содержит все циклические сдвиги собственных последовательностей (кодовых слов). В терминах орбит это означает, что циклический код V является объединением конечного числа орбит: $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_M$, т.е. объединением конечного числа подмножеств, элементы которых удовлетворяют свойству. Веса w последовательностей орбит (число ненулевых элементов последовательностей C_i) определяются весовым спектром кода V. Нулевая орбита V_0 содержит одну (нулевую) последовательность. Каждая ненулевая орбита содержит не более n последовательностей, эквивалентных друг другу относительно операции циклического сдвига (2). Последовательности из разных орбит не могут быть циклически сдвинутыми копиями друг друга.

Таким образом, групповой код однозначно задается лидерами (представителями) составляющих его циклических орбит. Это свойство положим в основу синтеза ансамбля дискретных сигналов: на основе сечения ненулевых циклических орбит (выбора лидера, представителя каждой орбиты) сформируем множество дискретных последовательностей с дистанционными свойствами исходного группового (n, k, d) кода V и не эквивалентных друг другу относительно циклического сдвига (2), т.е. не принадлежащих одной орбите.

Схема сечения ненулевых циклических орбит группового кода представлена на рис. 1.

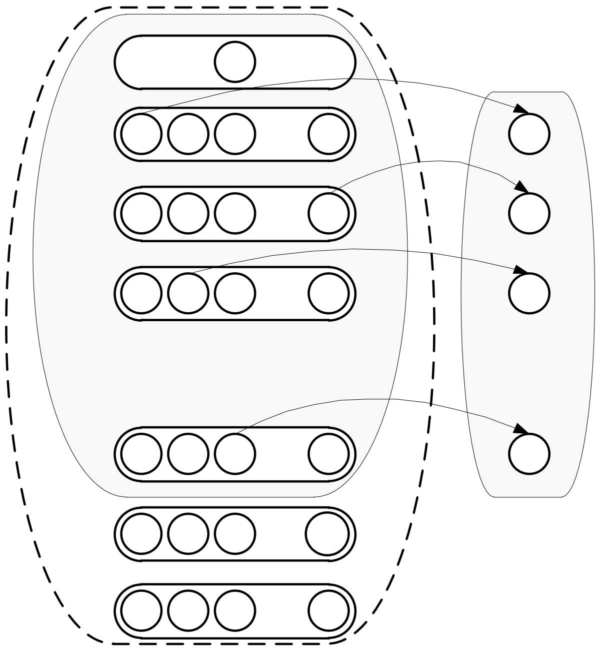

Рис. 1. Схема сечения ненулевых циклических орбит группового кода

На рис. 1 показано разложение векторного пространства $GF^n(q)$ на множества непересекающихся орбит V_ξ, $\xi = 0, \ldots, L$, представление группового кода V через объединение конечного числа орбит и схема выбора лидеров орбит - по одному произвольному представителю из каждого циклического подмножества V_ξ, $\xi = 0, \ldots, M$ (для удобства обозначения кодовые слова $C_{v,u} = \left(c_0^{v,u}, c_1^{v,u}, \ldots c_{n-1}^{v,u}\right)$ кода V обозначены двумя индексами: v – номер орбиты V_v кода V, $v = 1, \ldots, M$; u – номер кодового слова в орбите, $u = 1, \ldots, z_v$, где z_v – число кодовых слов в орбите V_v, $z_v \le n-1$.

Из отобранных представителей орбит формируем множество $S = (S_1, S_2, \ldots, S_M)$, где $S_v = C_{v,u}$, $v = 1, \ldots, M$, а выбор индекса u при соответствующем $C_{v,u}$ определяется правилом сечения v-й циклической орбиты группового кода.

Рассмотрим двоичный случай, т.е ограничимся исследованием свойств множества $S = (S_1, S_2, \ldots, S_M)$, образованного посредством сечения циклических орбит группового двоичного кода. Элементы формируемых дискретных последовательностей (дискретных сигналов) $S_v = \left(s_0^v, s_1^v, \ldots s_{n-1}^v\right)$ зададим по элементам отобранных кодовых слов (лидеров орбит) $C_{v,u} = \left(c_0^{v,u}, c_1^{v,u}, \ldots c_{n-1}^{v,u}\right)$ следующим образом:

$$s_i^v = \begin{cases} 1, c_i^{v,u} = 1; \\ -1, c_i^{v,u} = 0. \end{cases}$$

Предположим, что рассматриваемый код V имеет весовой спектр вида: $A(w)$, $w = 0, \ldots, n$, где $A(w)$ - число кодовых слов кода V с весом w.

Тогда образованное сечением циклических орбит кода V множество двоичных дискретных сигналов $S = \left(S_1, S_2, \ldots, S_M\right)$, обладает корреляционными и ансамблевыми свойствами, определяемыми следующим утверждением [3].

Утверждение.

1. Боковые лепестки периодической функции авто- (ПФАК) и взаимной (ПФВК) корреляции ансамбля сигналов $S = \left(S_1, S_2, \ldots, S_M\right)$ принимают следующие значения:

$$\text{ПФВК}, \text{ПФАК} = \frac{n - 2w}{n}, \; w = d, d+1, \ldots, n, \qquad (3)$$

для таких w, что $A(w) \neq 0$.

2. Для всех таких $w = d, d+1, \ldots, n$, что $A(w) = 0$ боковые лепестки ПФАК и ПФВК никогда не принимают значений $\frac{n - 2w}{n}$.

3. Мощность M ансамбля $S = \left(S_1, S_2, \ldots, S_M\right)$ определяется числом ненулевых орбит кода V и ограничена снизу выражением: $M \geq \frac{2^k - 1}{n}$. Равенство выполняется в случае максимального периода последовательностей всех орбит, образующих код, т.е. если код V состоит из набора орбит, образованных последовательностями максимальной длины (m-последовательностями).

Таким образом, алгебраическое сечение циклических орбит группового кода позволяет сформировать множество последовательностей $S = \left(S_1, S_2, \ldots, S_M\right)$, которые не являются циклически сдвинутыми копиями друг друга и обладают заранее заданными дистанционными свойствами группового кода. Это позволяет алгебраически строить большие ансамбли дискретных сигналов с многоуровневой функцией авто- и взаимной корреляции.

Проведем оценку свойств двоичных дискретных сигналов для различных правил формирования группового (n, k, d) кода V над $GF(2)$, т.е. для различного числа сомножителей в $h(x)$ и $g(x)$.

Рассмотрим первый, наиболее простой случай, когда двоичный групповой (n, k, d) код V над $GF(2)$ задан через проверочный многочлен вида

$$h(x) = f_i(x) = \prod_{s=0}^{m-1}\left(x - \alpha^{i\left(2^s\right)}\right).$$

Такой код содержит одну ненулевую циклическую орбиту, его весовой спектр имеет вид:

$$A(w) = \begin{cases} 1, w = 0; \\ 0, w = 1, \ldots, 2^{m-1} - 1; \\ \neq 0, w = 2^{m-1}; \\ 0, w = 2^{m-1} + 1, \ldots, 2^m - 1, \end{cases}$$

что с учетом (3) дает следующую оценку значений боковых лепестков:

$$\text{ПФВК}, \text{ПФАК} = \frac{-1}{2^m - 1}. \qquad (4)$$

Оценим мощность M ансамбля формируемых сигналов. Всего имеем $2^k - 1 = 2^m - 1$ ненулевых кодовых слов группового кода. Период каждой последовательности максимальный (что следует из примитивности элемента α). Откуда имеем $M = \frac{2^m - 1}{2^m - 1} = 1$, т.е. код содержит всего одну ненулевую орбиту, каждый представитель которой является субортогональным сигналом

$$\left(\text{ПФВК}, \text{ПФАК} = \frac{-1}{2^m - 1}\right).$$

Другими словами, через сечение циклической орбиты группового кода нами синтезирован простейший и наиболее изученный класс сигналов: m-последовательность.

Для построения более сложных классов сигналов рассмотрим случай, когда двоичный групповой (n, k, d) код V над $GF(2)$ задан через проверочный многочлен вида

$$h(x) = \prod_{s=1}^{m-1}\left(x - \alpha^{i_1\left(2^s\right)}\right)\left(x - \alpha^{i_2\left(2^s\right)}\right),$$

где порядок элементов α^{i_1} и α^{i_2} равен порядку мультипликативной группы конечного поля $GF\left(2^m\right)$. Очевидно, что по сравнению со случаем формирования субортогональных дискретных сигналов в качестве корней проверочного многочлена используются элементы двух циклотомических классов.

Весовой спектр рассматриваемого кода имеет следующий вид:

$$A(w)=\begin{cases}1, w=0;\\ 0, w=1,\ldots,2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ 0, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1}+1,\ldots,2^{m-1}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1};\\ 0, w=2^{m-1}+1,\ldots,2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ 0, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1}+1,\ldots,2^{m}-1.\end{cases}$$

Используя выражение (3) получим:

$$\text{ПФВК}, \text{ПФАК}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-1+2^{\frac{m+1}{2}}}{2^m-1}, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ \dfrac{-1}{2^m-1}, w=2^{m-1};\\ \dfrac{-1-2^{\frac{m+1}{2}}}{2^m-1}, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1}.\end{cases} \tag{5}$$

Мощность ансамбля формируемых таким образом сигналов определяется выражением:

$$M=\frac{2^{2m}-1}{2^m-1}=2^m+1. \tag{6}$$

Полученные оценки соответствуют дискретным последовательностям Голда [6, 7].

Таким образом, предлагаемый подход позволяет синтезировать известные классы дискретных сигналов (субортогональные последовательности и коды Голда) новым способом - через сечение циклических орбит группового кода.

Для построения новых классов дискретных сигналов рассмотрим случай, когда двоичный групповой (n,k,d) код V над $GF(2)$ задан через проверочный многочлен вида:

$$h(x)=$$

$$=\prod_{s=1}^{m-1}\left(x-\alpha^{i_1\left(2^s\right)}\right)\left(x-\alpha^{i_2\left(2^s\right)}\right)\left(x-\alpha^{i_3\left(2^s\right)}\right),$$

где порядок элементов α^{i_1}, α^{i_2} и α^{i_3} равен порядку мультипликативной группы конечного поля $GF\left(2^m\right)$.

Весовой спектр заданного таким образом кода имеет вид:

$$A(w)=\begin{cases}1, w=0;\\ 0, w=1,\ldots,2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}};\\ 0, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}}+1,\ldots,2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ 0, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1}+1,\ldots,2^{m-1}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1};\\ 0, w=2^{m-1}+1,\ldots,2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ 0, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1}+1,\ldots,2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}}-1;\\ \neq 0, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}};\\ 0, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}}+1,\ldots,2^{m}-1.\end{cases}$$

После подстановки в (3) получим оценку уровней боковых лепестков ПФВК, ПФАК:

$$\text{ПФВК}, \text{ПФАК}=\begin{cases}\dfrac{-1-2^{\frac{m+1}{2}+1}}{2^m-1}, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}};\\ \dfrac{-1-2^{\frac{m+1}{2}}}{2^m-1}, w=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ \dfrac{-1}{2^m-1}, w=2^{m-1};\\ \dfrac{-1+2^{\frac{m+1}{2}}}{2^m-1}, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ \dfrac{-1+2^{\frac{m+1}{2}+1}}{2^m-1}, w=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}}.\end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, использование групповых кодов позволяет сформировать новый класс дискретных сигналов с пятиуровневой ПФВК. При этом три уровня боковых лепестков соответствуют рассмотренным выше трехуровневым дискретным сигналам (кодам Голда), два дополнительных уровня соответствуют ненулевым компонентам весового спектра использованного группового кода. Мощность ансамбля сигналов задается выражением:

$$M=\frac{2^{3m}-1}{2^m-1}=2^{2m}+2^m+1. \tag{8}$$

Обобщим полученные выше результаты на случай построения двоичных дискретных сигналов с многоуровневой функцией корреляции.

Для этого рассмотрим случай, когда (n,k,d) код V над $GF(2)$ задан через проверочный многочлен вида:

$$h(x)= \\ =\prod_{s=1}^{m-1}\left(x-\alpha^{i_1(2^s)}\right)\left(x-\alpha^{i_2(2^s)}\right)...\left(x-\alpha^{i_u(2^s)}\right),$$

где порядок элементов α^{i_1}, α^{i_2} … α^{i_u} равен порядку мультипликативной группы поля $GF\left(2^m\right)$.

Оценим весовой спектр кода. Многочлен $h(x)$ содержит в качестве сомножителя проверочные многочлены всех кодов, с проверочными многочленами:

$$h_y(x)=f_{i1}(x)f_{i_2}(x)...f_{i_y}(x),\ y\le u.$$

Отсюда следует, что ненулевые компоненты весового спектра образуются поочередным добавлением (в порядке добавления сомножителей в многочлен $h(x)$) соответствующей пары (для всех $y=2,3,...,u$):

$$A(z_y)\ne 0,$$

$$A(2^m-z_y)\ne 0,$$

где:

$$z_y= \\ =\max_{s=0,..,m-1}\left\{\begin{matrix}\left(2^s\right)\bmod\left(2^m-1\right),\left(i_2 2^s\right)\bmod\left(2^m-1\right),..,\\ \left(i_y 2^s\right)\bmod\left(2^m-1\right)\end{matrix}\right\}.$$

Общее выражение для оценки весового спектра запишем в виде (9). С учетом (3) соответствующее выражение по оценке уровней боковых лепестков ПФВК примет вид (10).

Оценим мощность ансамбля формируемых дискретных сигналов. Мощность используемого кода $2^k=2^{um}$, всего имеется $2^k-1=2^{um}-1$ ненулевых кодовых слов. Положим, что каждое кодовое слово обладает максимальным периодом, тогда получим (11).

Анализ полученных выражений показывает, что формируемые предлагаемым методом дискретные сигналы обладают многоуровневыми функциями авто- и взаимной корреляции. Величины боковых выбросов принимают конечное число значений, задаваемых весовыми свойствами используемого группового кода. Мощность ансамбля сигналов определяется кодовыми соотношениями группового кода.

Рассмотрим особенности практической реализации устройств формирования предлагаемых дискретных сигналов с многоуровневой функцией корреляции.

$$A(w)=\begin{cases}1,\ w=0;\\ 0,\ w=1,...,z_u-1;\\ \ne 0,\ w=z_u;\\ ...\\ \ne 0,\ w=z_3=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}};\\ 0,\ w=z_3+1,...,z_2-1;\\ \ne 0,\ w=z_2=2^{m-1}-2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ 0,\ w=z_2+1,...,z_1-1;\\ \ne 0,\ w=z_1=2^{m-1};\\ 0,\ w=z_1+1,...,2^m-z_2-1;\\ \ne 0,\ w=2^m-z_2=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}-1};\\ 0,\ w=2^m-z_2+1,...,2^m-z_3-1;\\ \ne 0,\ w=2^m-z_3=2^{m-1}+2^{\frac{m+1}{2}};\\ ...\\ \ne 0,\ w=2^m-z_u;\\ 0,\ w=w=2^m-z_u+1,...,2^m-1.\end{cases} \tag{9}$$

$$\text{ПФВК, ПФАК}=\begin{cases}\dfrac{2^m-2z_u-1}{2^m-1},\ w=z_u;\\ ...\\ \dfrac{2^m-2z_3-1}{2^m-1}=\dfrac{-1-2^{\frac{m+1}{2}+1}}{2^m-1},\ w=z_3;\\ \dfrac{2^m-2z_2-1}{2^m-1}=\dfrac{-1-2^{\frac{m+1}{2}}}{2^m-1},\ w=z_2;\\ \dfrac{2^m-2z_1-1}{2^m-1}=\dfrac{-1}{2^m-1},\ w=z_1;\\ \dfrac{2^m-2(2^m-z_2)-1}{2^m-1}=\dfrac{-1+2^{\frac{m+1}{2}}}{2^m-1},\ w=2^m-z_2;\\ \dfrac{2^m-2(2^m-z_3)-1}{2^m-1}=\dfrac{-1+2^{\frac{m+1}{2}+1}}{2^m-1},\ w=2^m-z_3;\\ ...\\ \dfrac{2^m-2(2^m-z_u)-1}{2^m-1},\ w=2^m-z_u.\end{cases} \tag{10}$$

$$M=\frac{2^{um}-1}{2^m-1}=2^{(u-1)m}+2^{(u-2)m}+...+2^m+1. \tag{11}$$

Реализация устройств формирования сигналов

Отметим, что предлагаемый метод обобщает известные способы построения некоторых известных последовательностей (субортогональных дискретных сигналов и кодов Голда – см. (4) – (6)). Практическая реализация устройств формирования дискретных сигналов предлагаемым методом также наследует и обобщает известные подходы по построению m-последовательностей и трехуровневых сигналов Голда.

Элементы последовательностей максимальной длины (m-последовательностей) формируются с помощью схемы преобразования на основе линейного регистра сдвига [8]. Схема подключения отводов регистра сдвига в цепь обратной связи задается коэффициентами примитивного многочлена степени m:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m .$$

При этом длина формируемых двоичных последовательностей равна $n = 2^m - 1$ и для их формирования нужно использовать регистр сдвига с m двоичными разрядами. Начальное состояние регистра сдвига задает конкретный вид формуемой последовательности. Боковые лепестки периодической функции автокорреляции формуемой последовательности удовлетворяют (4).

Элементы трехуровневых последовательностей (кодов Голда) формируются с помощью схемы преобразования на основе двух линейных регистров сдвига [6].

Схема подключения отводов первого и второго регистров сдвига в цепь обратной связи задается коэффициентами двух примитивных многочленов степени m:

$$a_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + \ldots + a_{1,k}x^m = f_i(x) = \prod_{s=0}^{m-1}\left(x - \alpha^{i\left(2^s\right)}\right);$$

$$a_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2 + \ldots + a_{2,k}x^m = f_j(x) = \prod_{s=0}^{m-1}\left(x - \alpha^{j\left(2^s\right)}\right),$$

где $f_i(x)$, $f_j(x)$ – минимальные многочлены элементов α^i и α^j, соответственно.

Порядок элементов α^i и α^j равен порядку мультипликативной группы конечного поля $GF\left(2^m\right)$. Длина формируемых последовательностей равна $n = 2^m - 1$, для их построения необходимо использовать регистры сдвига с m двоичными разрядами. Начальное состояние регистров сдвига задает конкретный вид формуемой последовательности.

Формирование последовательностей Голда основано на суммировании по модулю 2 двух последовательностей максимальной длины, каждая из которых формируется соответствующими регистрами сдвига. Операция суммирования выполняется посимвольно. При этом между двумя регистрами поддерживаются одни и те же фазовые соотношения, а формуемая последовательность имеет такую же длину, как и исходные последовательности максимальной длины. Добавление к одной последовательности максимальной длины другой последовательности максимальной длины циклический сдвинутой на произвольное количество двоичных разрядов (от 1 до $2^m - 1$) дает последовательность, которая отличается от соответствующих сдвигов исходных последовательностей. Иначе говоря, в случае, когда m просте число, рассмотренный генератор последовательностей Голда позволяет формировать ансамбль сигналов, мощность которых удовлетворяет оценке (5) а корреляционные свойства удовлетворяют (5). Начальное состояние регистра сдвига задает конкретный вид формуемой последовательности.

Обобщая рассмотренные устройства формирования дискретных сигналов на случай многоуровневых последовательностей, получим следующую схему (рис. 2) [9]. Формирование дискретных сигналов многоуровневой функцией корреляции заключается в том, что длину последовательности выбирают больше длины информационной последовательности символов, а ее элементы формируются с помощью переключательных схем, которые построены, например, на основе цепи из u линейных регистров сдвига и сумматора.

Схема подключения отводов регистров сдвига в цепь обратной связи задается коэффициентами соответствующих примитивных многочленов степени m:

$$a_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + \ldots + a_{1,k}x^m = f_{i_1}(x) = \prod_{s=0}^{m-1}\left(x - \alpha^{i_1\left(2^s\right)}\right);$$

$$a_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2 + \ldots + a_{2,k}x^m = f_{i_2}(x) = \prod_{s=0}^{m-1}\left(x - \alpha^{i_2\left(2^s\right)}\right);$$

$$a_u(x) = a_{u,0} + a_{u,1}x + a_{u,2}x^2 + \ldots + a_{u,k}x^m = f_{i_u}(x) = \prod_{s=0}^{m-1}\left(x - \alpha^{i_u\left(2^s\right)}\right),$$

где $f_{i_1}(x)$, $f_{i_2}(x)$, …, $f_{i_u}(x)$ - минимальные многочлены элементов α^{i_1}, α^{i_2}, …, α^{i_u}, соответственно.

Порядок элементов α^{i_1}, α^{i_2}, …, α^{i_u} равен порядку мультипликативной группы конечного поля $GF\left(2^m\right)$. Длина формируемых последовательностей равна $n = 2^m - 1$, для их построения необходимо использовать регистры сдвига с m двоичными разрядами. Начальное состояние регистров сдвига задает конкретный вид формуемой последовательности. В случае, когда m просте число, рассмотренный генератор позволяет формировать ансамбль сигналов, мощность которых в общем случае удовлетворяет оценке (11) а корреляционные свойства удовлетворяют (10). Начальное состояние регистра сдвига задает вид формуемой последовательности.

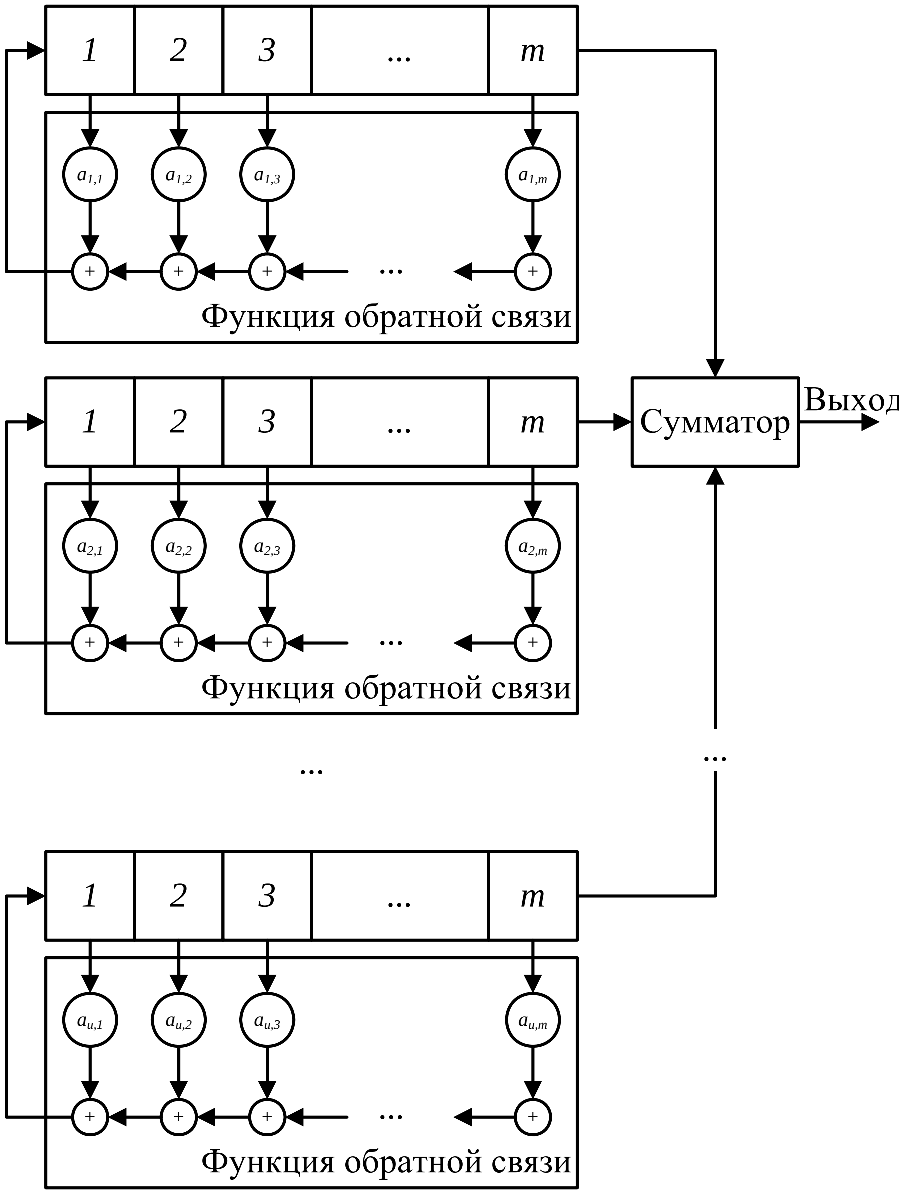

Рис. 2. Структурная схема устройства формирования дискретных последовательностей с многоуровневой функцией корреляции

Таким образом, предлагаемая схема формирования дискретных последовательностей является по своей сути дальнейшим развитием известных подходов к практической реализации генераторов сигналов с особыми корреляционными свойствами. Структурная схема устройства, приведенного на рис. 2, является обобщением генераторов m-последовательностей и кодов Голда на случай произвольного числа используемых регистров, что в конечном счете позволяет получить конкретный технический эффект: существенное повышение мощности ансамблей формируемых сигналов при незначительном ухудшении корреляционных свойств. При повышении длины последовательностей получаемый эффект возрастает.

В качестве примера в таблице 1 с использованием выражений (4) – (11) приведены оценки ансамблевых и корреляционных свойств формируемых дискретных сигналов. В первых трех колонках таблицы указаны параметры соответствующих групповых кодов, использованных для синтеза дискретных сигналов (длина кода *n* соответствует длине формируемых последовательностей). В четвертой колонке приведены оценки мощности синтезированного ансамбля дискретных сигналов. В следующих двух колонках указаны абсолютные и относительные (нормированные относительно длины n) значения максимальных выбросов боковых лепестков функции авто- и взаимной корреляции. В последней колонке указано соответствие с известными классами дискретных сигналов (например, субортогональные (m-последовательности) или коды Голда). Для впервые синтезированных классов сигналов (с 5-ти, 7-ми и более уровневой функцией корреляции) приведено значение «*New*» с указанием количества уровней боковых лепестков функции корреляции.

Таблица 1

Оценка ансамблевых и корреляционных свойств дискретных сигналов

Длина n	k	d	Мощность ансамбля M	Максимальные боковые выбросы ПФАК и ПФВК		Известный аналог
31	15	8	1057	0,52	2,3 / n	*New (5 уровней)*
	10	12	33	0,23	1,3 / n	Коды Голда (3 уровня)
	5	16	1	-0,03	–1 / n	m-последоват.
127	28	44	$2\cdot10^6$	0,3	3,4 / n	*New (7 уровней)*
	21	48	16 513	0,24	2,7 / n	*New (5 уровней)*
	14	56	129	0,12	1,4 / n	Коды Голда (3 уровня)
	7	64	1	0,008	-1 / n	m-последоват.
511	39	192	10^9	0,25	5,7 / n	*New (9 уровней)*
	30	220	$2\cdot10^6$	0,14	3,2 / n	*New (7 уровней)*
	27	224	262 657	0,12	2,7 / n	*New (5 уровней)*
	18	240	513	0,06	1,4 / n	Коды Голда (3 уровня)
	9	256	1	0,002	–1 / n	m-последоват.

На рисунках приведены примеры ПФАК и ПФВК для синтезированных дискретных сигналов длины n = 127 с трехуровневой (рис. 3, 4), и пятиуровневой (рис. 5, 6) функцией корреляции.

ПФАК

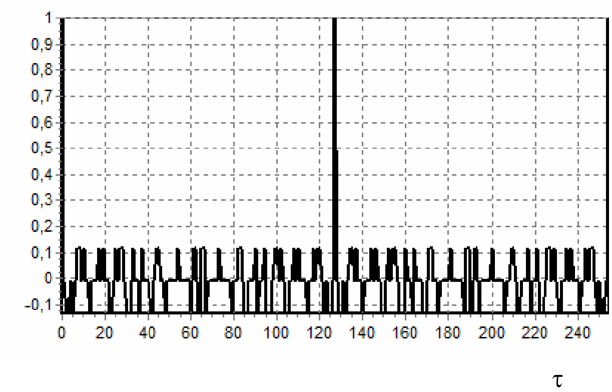

Рис. 3. ПФАК

ПФВК

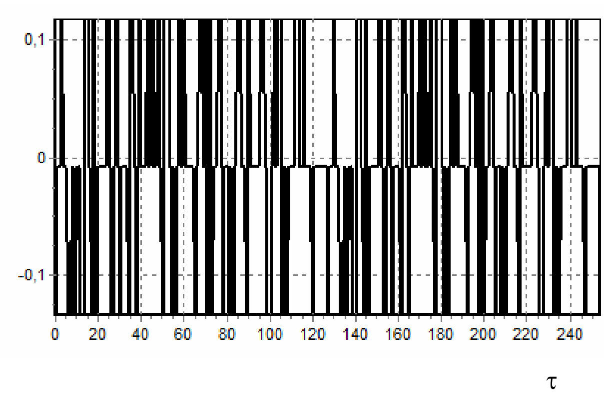

Рис. 4. ПФВК

ПФАК

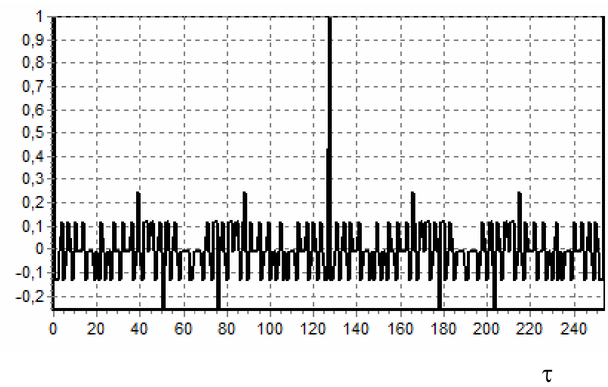

Рис. 5. ПФАК

ПФВК

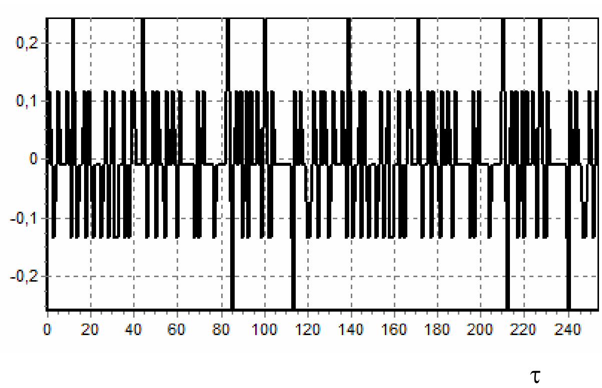

Рис. 6. ПФВК

Таким образом, проведенные исследования показали, что предлагаемый метод позволяет формировать слабокоррелированные дискретные сигналы с улучшенными ансамблевыми свойствами. Характеристики формируемых ансамблей сигналов (число и величина уровней боковых лепестков, мощность ансамбля последовательностей) зависят от свойств используемого группового кода. Это качество целесообразно использовать при построении широкополосных систем радиосвязи.

Оценка эффективности использования формируемых дискретных сигналов

Рассмотрим процесс передачи информации по радиоканалам управления с использованием формируемых ансамблей дискретных сигналов с многоуровневой функцией корреляции, проведем оценку соответствующей абонентской емкости и помехоустойчивости.

Положим, что формируемые дискретные сигналы используются для кодового разделения каналов в цифровой системе связи с множественным доступом, т.е. каждой формируемой последовательности ставится в соответствие один из радиоканалов доступа. Тогда абонентская емкость системы связи будет определятся мощностью M используемого ансамбля дискретных сигналов. Проведем оценку помехоустойчивости организуемых таким образом радиоканалов управления.

В соответствии с [10-12], под показателем помехоустойчивости радиоканалов управления понимается минимально необходимое соотношение энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума E/N_0, требуемое для достижения заданной достоверности передачи информации. Под достоверностью понимают степень соответствия переданных данных принятым данным на приемной стороне. Количественной мерой достоверности передачи данных является вероятность правильного приема $P_{п.п.}$ отдельных элементов (бит) переданных данных [10 – 12]. Более удобным для количественной оценки является показатель потери достоверности, в качестве которого используют вероятность ошибочного приема $P_{ош} = 1 - P_{п.п.}$ отдельных элементов (бит) переданных данных.

Таким образом, в качестве показателя помехоустойчивости радиоканалов управления будем использовать минимально необходимое соотношение E/N_0, требуемое для достижения заданной вероятности $P_{ош}$.

В работах [10 – 12] показано, что для двоичных систем передачи данных вероятность ошибочного приема одного элемента (бита) данных можно выразить как:

$$P_{ош} = 1 - F(H),\ H = \sqrt{\left[\frac{(E_0 + E_1)}{2N_0}\right](1-R)}\,, \quad (12)$$

где E_0, E_1 – энергии дискретных сигналов $u_0(t)$, $u_1(t)$ соответственно; N_0 – спектральная плотность мощности шума; R – значение коэффициента взаимной корреляции дискретных сигналов $u_0(t)$, $u_1(t)$, $F(x)$ – интеграл вероятностей,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy.$$

В качестве величины R будем использовать максимальное абсолютное значение боковых выбросов периодической функции взаимной корреляции используемых дискретных сигналов, т.е. примем $R = \max|ПФВК|$.

В случае равенства $E_0 = E_1$ выражение (11) примет вид

$$P_{ош} = 1 - F\left(h_2 \cdot (1-R)\right), \quad (13)$$

где h_2 – отношение сигнал-шум приходящееся на одну двоичную единицу,

$$h_2 = \frac{E_2}{N_0};$$

E_2 – энергия двоичного сигнала.

В работах [10 – 12] показано, что для сигналов с равными коэффициентами корреляции вероятность ошибочного приема элемента (бита) будет такой же, как и в случае использования ортогональных дискретных сигналов, но с внесенными поправками на помехоустойчивость, т.е. на минимально необходимое соотношение энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума E/N_0, требуемое для достижения заданной вероятности ошибки $P_{ош}$. Следовательно, запишем:

$$P_{ош}(h_m, R) = P_{ош}(h_m\sqrt{1-R}, 0)\,, \quad (14)$$

где h_m – отношение сигнал-шум приходящееся на один M-ичный сигнал

$$h_m = h_2\sqrt{\log_2 M}\,;$$

$P_{ош}(h_m, R)$ – вероятность ошибки при отношении сигнал-шум h_m и коэффициенте корреляции сигналов R; $P_{ош}(h_m\sqrt{1-R}, 0)$ – вероятность ошибки для ортогональных сигналов (с коэффициентом корреляции R = 0).

Как следует из анализа выражений (11) – (13) применение квазиортогональных (с $R \approx 0$) дискретных сигналов приводит к снижению (по сравнению с $R = 0$ для ортогональных сигналов) помехоустойчивости, пропорционально квадратному корню из меры некоррелированности дискретных сигналов $\sqrt{1-R}$.

Таким образом, использование больших ансамблей квазиортогональных дискретных сигналов с одной стороны приводит к существенному повышению абонентской емкости радиоканалов управления (за счет повышения мощности M ансамблей сигналов), с другой – к незначительному (в $\sqrt{1-R}$ раз) снижению помехоустойчивости (требуемому соотношению E/N_0). Фактически, снижение помехоустойчивости является той «платой», которую требуется внести за расширение ансамбля дискретных сигналов и соответствующее повышение абонентской емкости радиоканалов управления.

Проведем оценку снижения помехоустойчивости радиоканалов управления при использовании формируемых дискретных сигналов. При этом будем оценивать как мощность ансамблей сигналов M, так и соответствующую величину $\sqrt{1-R}$.

В таблице 2 приведены оценки мощности формируемых дискретных сигналов и оценки снижения помехоустойчивости радиоканалов управления при их использовании. Приведенные оценки характеризуют снижение помехоустойчивости относительно использования ортогональных дискретных сигналов.

Таблица 2

Оценка абонентской емкости и помехоустойчивости радиоканалов управления при использовании формируемых дискретных сигналов

	Трехуровневые дискретные сигналы (сигналы Голда)		Пятиуровневые дискретные сигналы (новый класс сигналов)	
n	M	$\sqrt{1-R}$	M	$\sqrt{1-R}$
31	33	0,842	1057	0,672
127	129	0,931	16513	0,860
2047	2049	0,984	4196353	0,968
8191	8193	0,992	67117057	0,984
131071	131073	0,998	17180000257	0,996
524287	524289	≈ 1	274878431233	≈ 1
8388607	8388609	≈ 1	70368752566273	≈ 1
536870911	536870913	≈ 1	288230376688582657	≈ 1
2147483647	2147483649	≈ 1	4611686020574871553	≈ 1

Анализ данных таблицы 2 показывает, что применение формируемых ансамблей дискретных сигналов позволяет существенно повысить абонентскую емкость системы связи, с ростом длины последовательностей эта тенденция усиливается. При этом наблюдается незначительное снижение помехоустойчивости радиоканалов управления.

Так, например, при длине последовательностей n = 127 использование кодов Голда позволяет организовать до 129 цифровых каналов. При этом снижение помехоустойчивости по сравнению с ортогональными сигналами не превышает 7%. Применение новых классов дискретных сигналов, формируемых предложенным методом (в данном случае с пятиуровневой функцией корреляции), позволяет при той же длине последовательностей повысить абонентскую емкость более чем в 100 раз, снизив при этом помехоустойчивость еще на 7%.

С повышением длины последовательностей выигрыш по абонентской емкости возрастает, снижается так же проигрыш по обеспечиваемой помехоустойчивости радиоканалов управления. Так, например, при длине последовательностей n = 131071 использование нового класса дискретных сигналов с пятиуровневой функцией корреляции позволяет повысить (по сравнению с трехуровневыми кодами Голда) абонентскую емкость радиоканалов управления более чем в 130 000 раз при практически эквивалентной помехоустойчивости связи.

Таким образом, проведенные исследования показали, что использование формируемых дискретных сигналов позволяет существенно повысить абонентскую емкость радиоканалов управления при незначительном снижении помехоустойчивости связи. Кроме того, учитывая особенности построения ансамблей сигналов через изменение числа сомножителей в многочлене (1) можно реализовать адаптивно изменяющийся к помеховой обстановке динамический режим функционирования радиосистем управления с множественным доступом.

Выводы

Проведенные исследования показали, что предлагаемый подход позволяет формировать слабокоррелированные дискретные сигналы с улучшенными ансамблевыми свойствами. Характеристики формируемых ансамблей сигналов (число и величина уровней боковых лепестков, мощность ансамбля последовательностей) зависят от свойств используемого группового кода.

Практическое использование разработанного метода формирования больших ансамблей слабокоррелированных дискретных сигналов позволяет повысить качественные характеристики радиосистем управления со множественным доступом.

Проведенные исследования показали, что использование сформированных больших ансамблей дискретных сигналов позволяет без значительного снижения помехоустойчивости радиоканалов управления существенно повысить абонентскую емкость системы связи и обеспечить множественный доступ абонентов информационного обмена.

Список литературы

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с.

2. Гряник М.В. Технология CDMA - будущее сотовых систем в Украине / М.В. Гряник, В.И. Фролов // Мир связи. – 1998. – № 3.– С. 40-43.

3. Метод синтеза псевдослучайных последовательностей с пятиуровневой функцией корреляции / А.А. Кузнецов, В.И. Грабчак, А.Н. Коваленко, В.Н. Сай // Матеріали четвертої наукової конференції Харківського університету Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. – Х.: ХУ ПС, 2008. – С. 135.

4. Стасев Ю.В. Способ построения ансамблей дискретных сигналов с заданными значениями боковых выбросов корреляции / Ю.В. Стасев, А.А. Кузнецов, А.Н. Коваленко // Науково-методичні основи оцінювання та управління техногенною безпекою у разі виникнення надзвичайної ситуації: матеріали першої науково-технічної конференції Програма конференції та тези доповідей. – Х.: НДІ макрографії, 2007. – С. 7-8.

5. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: пер. с англ. / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

6. Gold R. Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing / R. Gold // IEEE Trans., Inf. Th. – 1967. – V. IT-13, N 4. – P. 619-621.

7. Диксон Р.К. Широкополосные системы: пер. с англ. / Р.К. Диксон. – М.: Связь, 1979. – 304 с.

8. Хаффмен Д. Синтез линейных цепей последовательного декодирования / Д. Хаффмен // В сб. «Теория передачи сообщений». – М.: Изд-во иностранной литературы, 1957.

9. Патент UA 54546 U, МКІ (2009) H04J 13/00. Спосіб формування шумоподібних дискретних сигналів / Стасєв Ю.В., Кузнецов О.О., Сай В.М., Носік О.М.; № u 2010 07431; Заявл. 14.06. 010; Опубл. 10.11.2010, Бюл. №21, 2010 р. – 4с.

10. Прокис Дж. Цифровая связь. пер. с англ. / Дж. Прокис; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

11. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л.Е. Варакин. – М.: Сов. Радио, 1985. – 384 с.

12. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с.

Поступила в редколлегию 18.08.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.В. Стасев, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ З БАГАТОРІВНЕВОЮ ФУНКЦІЄЮ КОРЕЛЯЦІЇ

О.О. Кузнєцов, О.А. Смирнов, В.М. Сай

Запропоновано метод алгебраїчного формування великих ансамблів дискретних сигналів з багаторівневою функцією кореляції на основі перетину ненульових циклічних орбіт групового коду. Отримано аналітичні оцінки кореляційних і ансамблевих властивостей сформованих послідовностей. Встановлено, що характеристики сформованих ансамблів сигналів (число й величина рівнів бічних пелюстків, потужність ансамблю послідовностей) залежать від властивостей використовуваного групового коду. Розроблено пропозиції по реалізації пристроїв формування сигналів, отримані оцінки ефективності їхнього використання в системах радіозв'язку із множинним доступом.

Ключові слова: *дискретні сигнали, багаторівнева функція кореляції, кінцеві поля, двійковий груповий код.*

SHAPING DISCRETE SIGNAL WITH LAYERED FUNCTION OF THE CORRELATIONS

A.A. Kuznetsov, A.A. Smirnov, V.N. Say

The Offered method of the algebraic shaping the greater ensembles discrete signal with layered function of the correlations on base of the section of the nonzero round-robin orbits of the group code. They Are Received analytical estimations корреляционных and ансамблевых characteristic formed sequences. It Is Installed that features of the formed ensembles signal (the number and value level lateral petal, power of the ensemble of the sequences) hang from characteristic used group code. The Designed offer on realization device shaping signal, are received estimations to efficiency of their use in system radio communication with plural access.

Keywords: *discrete signals, layered function to correlations, final fields, binary group code.*