

УДК 378.14: 004.94:62

А.Г. Чухрай, С.И. Педан

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

## МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО СРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА В КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ПРОГРАММЕ

Описана разработка метода автоматического сравнения математических моделей физического объекта на примере инерционной машинки. Выбор периода дискретизации сравнения выходных данных математических моделей осуществлен путем анализа их спектральных характеристик. Описан процесс получения спектральных характеристик путем применения методов дискретного преобразования Фурье. Тестирование разработанного метода показало его высокую эффективность при обеспечении работы компьютерной обучающей программы и возможность применения метода для широкого круга технических задач.

**Ключевые слова:** компьютерная обучающая программа, внутренний цикл, компонент компетенции, математическая модель, дискретное преобразование Фурье, спектральная характеристика.

### Введение

Эффективная передача знаний и умений интеллектуальной компьютерной обучающей программы (ИКОП) может быть обеспечена за счет ее адаптации к уровню компетенции каждого из обучаемых с помощью двух циклов: внешнего и внутреннего [1]. Внешний цикл ответственен за принятие решения, какое следующее задание предоставить для выполнения обучаемому, исходя из анализа успешности овладения им предоставленными компонентами компетенции (КК). На уровне внутреннего цикла ИКОП принимает решения по обеспечению эффективного усвоения содержащихся в отдельном задании КК. В случае обнаружения недостаточного владения обучаемым некоторыми КК происходит формирование последовательности подзаданий с целью повышения компетенции обучаемого. Принятие решений о предоставлении очередного подзадания на уровне внутреннего цикла осуществляется с помощью байесовской сети, автоматически формируемой по эталонному алгоритму решения задания [2]. Работа внутреннего цикла начинается после определения системой некорректности работы алгоритма, построенного обучаемым.

**Постановка задачи исследования.** В настоящем исследовании решается вопрос разработки метода проверки правильности математической модели движения физического объекта, подчиняющегося законам Ньютона на примере инерционной машинки.

### 1. Построение математической модели физического объекта

Для конструктивизма дальнейшего изложения рассмотрим пример построения математической модели движения инерционной машинки [3]. Математическая модель описывает перемещение инерционной машинки по наклонной плоскости при нуле-

вом начальном ускорении и ее остановку на горизонтальном участке.

Инерционная машинка, обладая некоторой потенциальной энергией, определяющейся высотой начальной точки, под воздействием силы тяжести начинает движение вниз по наклонной плоскости. На участке разгона исходный запас потенциальной энергии расходуется на увеличение кинетической энергии машинки и на преодоление сил трения. Основная часть кинетической энергии накапливается в маховике, который на участке торможения выступает в роли двигателя. Дальнейшее поступательное движение объекта обеспечивается создаваемым маховиком крутящим моментом, приложенным к оси ведущей колесной пары. При движении на участке торможения накопленная кинетическая энергия расходуется на преодоление сил сопротивления. Постепенно запас энергии полностью расходуется и машинка останавливается.

При движении объект испытывает на себе действие нескольких сил, таких как сила сопротивления среды, сила внутреннего трения, сила трения колес о поверхность, нормальная сила реакции опоры, сила тяжести и прочие силы. Однако количественно описать действие некоторых перечисленных сил не представляется возможным. Поэтому упростим модель объекта, приняв ряд допущений:

- 1) масса машины распределена равномерно по ее объему;
- 2) трение во внутренних узлах машины считаем пренебрежимо малым;
- 3) сила сопротивления среды (воздуха) бесконечно мала;
- 4) проскальзывание между колесами и поверхностью отсутствует.

С учетом особенностей движения объекта и принятых допущений запишем обобщенное выра-

жение математической модели перемещения инерционной машинки:

$$X(t) = \begin{cases} K_1 \frac{t^2}{2}, & \text{при } t \in [0..t_p]; \\ L_p + K_2 \frac{(t-t_p)^2}{2} + V_p(t-t_p), & \text{при } t \in [t_p..t_T] \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{при } K_1 = \frac{g \cdot (\sin \alpha - \mu_{\text{тр}} \cdot \cos \alpha)}{1 + \frac{J_M \cdot i_p^2}{R_k^2 \cdot m_a}},$$

$$K_2 = -\frac{\mu_{\text{тр}} \cdot g}{1 + \frac{J_M \cdot i_p^2}{R_k^2}},$$

$$t_p = \sqrt{\frac{2L_p}{K_1}}, \quad V_p = \sqrt{2L_p K_1},$$

где  $X(t)$  – функция перемещения объекта;  $m_a$  – масса машины;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\alpha$  – угол наклона разгонного участка;  $\mu_{\text{тр}}$  – коэффициент трения между колесами и поверхностью;  $i_p$  – передаточное число редуктора;  $R_k$  – радиус колеса машины;  $J_M$  – момент инерции маховика;  $V_p$  – скорость объекта в конце участка разгона;  $t_p$  – время разгона;  $t_T$  – время остановки объекта на участке торможения;  $t$  – текущее время движения объекта;  $L_p$  – длина разгонного участка;  $K_1$  – ускорение объекта на участке разгона;  $K_2$  – ускорение объекта на участке торможения.

## 2. Определение правильности математической модели

Современные компьютерные средства обучения обеспечивают различные формы ввода ответа пользователя, начиная от выбора правильного варианта ответа из нескольких предлагаемых и заканчивая сложными интерактивными редакторами построения решений. Сложность представления ответа пользователя определяет уровень сложности проверки его правильности. Например, система обучения основам физики Andes [4] предлагает большое количество заданий, отличающихся формой ответа пользователя (ввод числовых значений, графические построения). Наибольшую свободу действий пользователя обеспечивает ввод ответа в виде алгебраических формул. В системе Andes разработан алгоритм Indy Check, позволяющий оценить правильность построенной формулы и определить промежуточные уравнения, которые были использованы для ее вывода. Тем не менее, Andes проверяет работу решения пользователя лишь на определенном наборе исходных данных. Для предотвращения неоднозначностей, которые могут возникнуть при проверке работы того же решения на другом наборе данных,

обучающая система вынуждена ограничивать пользователя в возможностях по построению своего собственного решения задачи, отличающегося от известных системе. Так, например, рассмотренная математическая модель (1) является одной из возможных форм описания движения инерционной машины. ИКОП должна предоставить максимально возможную свободу обучаемому в построении собственной формы математического описания движения объекта моделирования, которая, в конечном итоге, может оказаться адекватнее эталонной модели. Одной из таких форм представления ответа является ввод алгоритма решения задачи в виде программного кода, написанного на одном из языков высокого уровня (или на псевдоязыке). Для рассмотренной задачи программный код эталонного алгоритма расчета математической модели имеет следующий вид:

```
double znam=
1+Jm*Math.pow(ip,2)/(Math.pow(Rk,2)*m);
double k1=g*(Math.sin(a)-mtr*Math.cos(a))/znam;
double k2=-g*mtr/znam;
tr=Math.pow(2*Lr/k1,0.5);vr=k1*tr;
if (t<=tr) x=k1*Math.pow(t,2)/2;
else x=Lr+k2*Math.pow(t-tr,2)/2+vr*(t-tr);
```

Задание по построению алгоритма математической модели содержит описание его входных и выходных данных с указанием их названия и типов, а также поле ввода, в котором обучаемый и производит написание программного кода решения. После завершения выполнения задания ИКОП производит поиск наиболее похожего с алгоритмом обучаемого эталонного решения, после чего оба алгоритма поступают в блок проверки. Схема метода определения правильности работы алгоритма обучаемого представлена на рис. 1.

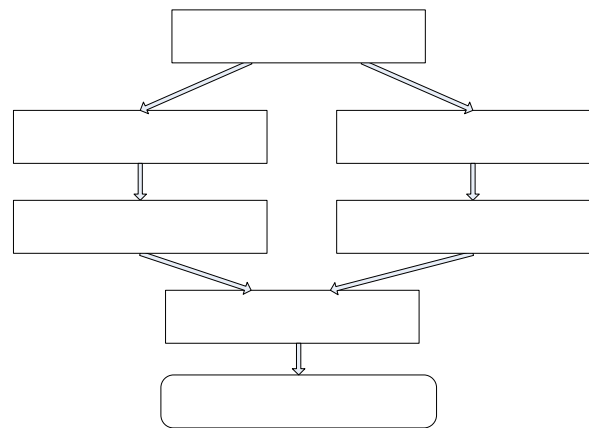


Рис. 1. Схема метода определения правильности работы алгоритма, построенного обучаемым

На вход эталонного алгоритма и алгоритма, построенного обучаемым, поступает сгенерированный набор входных данных. Для алгоритма построения математической модели инерционной машинки входными данными будут: момент инерции махови-

ка  $J_m$ , угол наклона плоскости  $\alpha$ , коэффициент трения колес о поверхность  $\text{mrg}$ , передаточное число редуктора  $i_p$ , радиус ведущих колес  $R_k$ , длина участка разгона  $L_p$ , масса машинки  $m$ , момент времени движения машинки  $t$ . Алгоритмы производят заложенные в них действия по обработке входных данных и возвращают набор значений выходных данных. Выходными данными для задачи построения математической модели машинки являются значения перемещения объекта  $x$  в момент времени  $t$ .

Полученные значения выходных данных поступают в блок сравнения, в котором принимается решение о правильности работы алгоритма обучаемого.

Алгоритм, построенный обучаемым, должен работать при любых наборах входных данных из их допустимого диапазона значений. Поэтому для окончательного вывода о правильности работы алгоритма необходимо осуществить последовательность действий, изображенных на рис. 1, на нескольких наборах сгенерированных значений входных данных. Если хотя бы на одном из таких наборов отклонение выходных данных алгоритма от эталонных превышает допустимую норму, то принимается решение о неправильности работы алгоритма, построенного обучаемым.

Рассмотрим более подробно метод сравнения результатов работы эталонного алгоритма и алгоритма, построенного обучаемым. На рис. 2 изображены результаты работы алгоритмов, полученные для различных значений времени перемещения машинки (от 0 до 8.5 с).

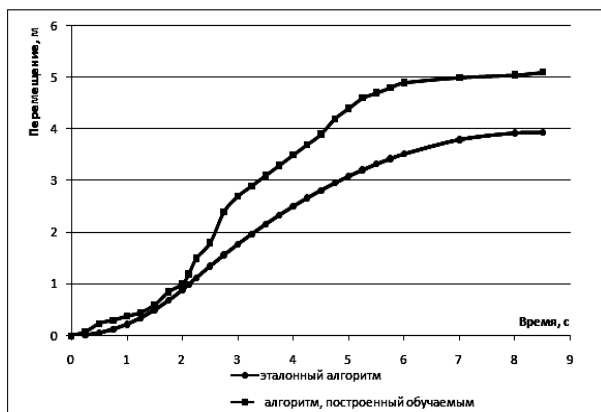


Рис. 2. Пример последовательностей выходных данных результатов работы алгоритмов

В первую очередь, для сравнения результатов работы математических моделей необходимо решить вопрос выбора периода дискретизации сравнения данных. Согласно теореме Котельникова-Шеннона [5], аналоговый сигнал, имеющий ограниченный спектр, может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго большей удвоенной макси-

мальной частоты спектра  $f_{\max}$ . Для получения спектральной характеристики функции целесообразно использовать преобразование Фурье. Использование непрерывного преобразования Фурье подразумевает знание выражения исследуемой функции в аналитическом виде. Но в нашем случае получение аналитического выражения функции из программного кода алгоритма решения задачи оказывается весьма трудоемкой задачей. По этой причине воспользуемся дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) [6], требующим в качестве входа массив дискретных значений, описывающих поведение некоторой функции в определенные моменты времени, как изображено на рис. 2. Для осуществления ДПФ наивным путем требуется порядка  $N^2$  операций для числа отсчетов  $N$ . Вместе с тем существует метод Cooley-Tukey [7] быстрого преобразования Фурье (БПФ), позволяющий вычислить ДПФ за время порядка  $N \log_2 N$ .

Рассмотрим работу метода Cooley-Tukey для некоторого набора выходных данных работы алгоритма математической модели при различных количествах компонент разложения. Полученные спектральные характеристики функции перемещения объекта представлены на рис. 3.

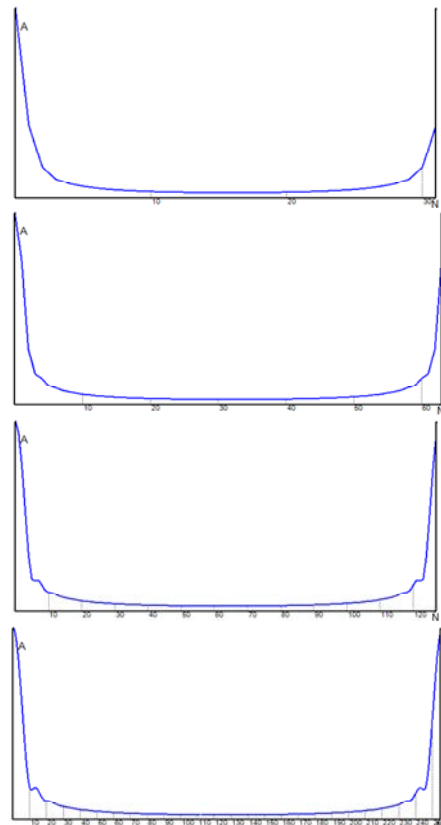


Рис. 3. Спектральные характеристики математической модели при различном количестве компонент разложения  $N$

Как видно из графиков, точность спектральной характеристики зависит от количества гармоник.

При его увеличении вид спектра меняется и, начиная с некоторого количества гармоник  $N$ , изменение площади, образованной графиком спектральной характеристики с горизонтальной осью частот, не превышает некоторую малую величину  $\varepsilon$ . Следовательно, последующие гармоники не будут оказывать значимого влияние на требуемую точность восстановления сигнала и мы можем их игнорировать. Таким образом, идея определения максимальной частоты спектра заключается в следующем:

1) Производим расчет массива выходных данных анализируемой функции. Для предметной области моделирования движения инерционной машинки выходным массивом данных является результат расчета перемещения объекта в соответствии с построенной математической моделью.

2) Производим построение спектра функции для заданного количества гармоник  $n$ . Изначально  $n=1$ .

3) Определяем площадь участка, который образует график спектральной характеристики с горизонтальной осью частот с помощью метода трапеций.

4) Определяем среднее отклонение площадей последних  $m$  ( $m < n$ ) спектральных характеристик от площади  $n$ -й характеристики по формуле:

$$\Delta S_{lastm} = \frac{\sum_{k=n-m}^{n-1} |S_n - S_k|}{m}. \quad (2)$$

5) Проверяем условие нахождения максимального количества гармоник, необходимых для корректного восстановления сигнала:

$$\Delta S_{lastm} \leq 0.05 \cdot S_n. \quad (3)$$

Выполнение условия (3) означает, что среднее отклонение площадей последних  $m$  спектральных характеристик составляет менее 5% от площади последней определенной характеристики.

6) При невыполнении условия (3) увеличиваем значение  $n$  на 1 и повторяем пункты 1 – 5. При выполнении условия заканчиваем работу алгоритма, найденное максимальное количество необходимых для корректного восстановления сигнала гармоник равно  $N = n - m$ .

По определенному значению  $N$  вычисляем максимальное значение частоты дискретизации:

$$f_{max} = \frac{N}{T_s}, \quad (4)$$

где  $T_s$  – период измерения входных данных сигнала.

На рис. 4 представлены результаты эксперимента по определению минимально необходимого количества компонент разложения функции перемещения инерционной машинки. На графике изображена зависимость значения площади  $S$ , образованной спектральной характеристикой с осью частот, от количества компонент разложения  $N$ .

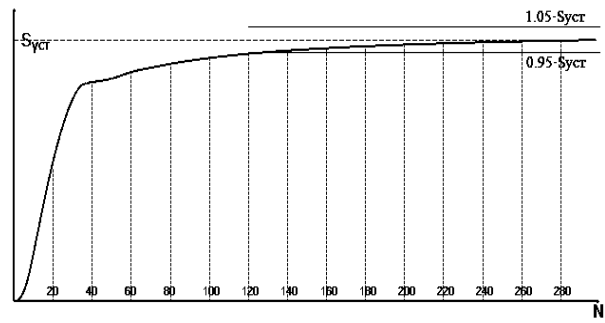


Рис. 4. Зависимость площади спектральной функции от количества компонент разложения

Как видно из характеристики, функция  $S(N)$  входит в «коридор»  $\pm 5\%$  от установившегося значения площади при  $N=130$ . Определим значение частоты 130-й гармоники с учетом периода измерения входных данных (время перемещения машинки), равного 8.5 с:

$$f_{max} = \frac{N}{T_s} = \frac{130}{8.5} = 15,294 \text{ с}^{-1}. \quad (5)$$

Исходя из данной теоремы Котельникова-Шеннона, для периода дискретизации сигнала должно соблюдаться следующее неравенство:

$$T_0 \leq \frac{1}{2f_{max}}, \quad (6)$$

где  $T_0$  – период дискретизации сигнала.

Воспользовавшись формулой (6), определяем, что период квантования функции перемещения инерционной машинки, полученной по эталонному алгоритму математической модели объекта, не должен превышать 0.0327 с.

Для выходной функции алгоритма обучаемого необходимо также определить максимальный период дискретизации, проделав действия, описанные выше для эталонного решения. Из двух определенных периодов дискретизации выбирается минимальный. Сравнение выходных функций работы эталонного алгоритма и алгоритма обучаемого происходит путем определения их среднего абсолютно отклонения по формуле:

$$MAD = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |X_s[t_{min} + i \cdot T_0] - X_o[t_{min} + i \cdot T_0]|, \quad (7)$$

где  $MAD$  – среднее абсолютное отклонение,  $N = \lfloor (t_{max} - t_{min}) / T_0 \rfloor + 1$  – количество точек сравнения данных ( $t_{min}$  – начало временного интервала измерений,  $t_{max}$  – конец временного интервала измерений),  $X_s(t)$  – значение выходной функции эталонного алгоритма,  $X_o(t)$  – значение выходной функции алгоритма, построенного обучаемым.

Для примера результатов работы математических моделей, изображенных на рис. 2, среднее абсолютное отклонение  $MAD = 0.73\text{м}$ , что значительно больше допустимой нормы расхождения результатов работы моделей. Поэтому ИКОП принимает

решение о неправильности работы алгоритма, построенного обучаемым, и необходимости начала работы внутреннего цикла [3].

### 3. Тестирование работы метода определения правильности математической модели

Промоделируем ситуацию, когда выходная функция алгоритма, построенного обучаемым, имеет колебательный характер. Предположим, что период дискретизации равен 1.06 с. На интервале измерений  $t \in [t_{\min}..t_{\max}]$  получаем 9 временных отсечек сравнения эталонной и пользовательской функций  $T_0, T_1, \dots, T_8$ . Определим среднее абсолютное отклонение функций.

$$MAD = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^8 |X_3(i \cdot 1.06) - X_0(i \cdot 1.06)| = 0.187m.$$

С учетом пройденного машиной расстояния, полученное значение  $MAD=0.187m$  является весьма приемлемым показателем и свидетельствует о правильности математических расчетов модели, построенной обучаемым.

Тем не менее, даже визуально видно, что выбранный период дискретизации является некорректным и недостаточным, так как при сравнении функций не учитывается их отклонение в окрестностях главных экстремумов функции обучаемого, расположенных в точках со значением времени 3.8 с, 5 с и 5.7 с. Отклонение в данных точках максимальное.

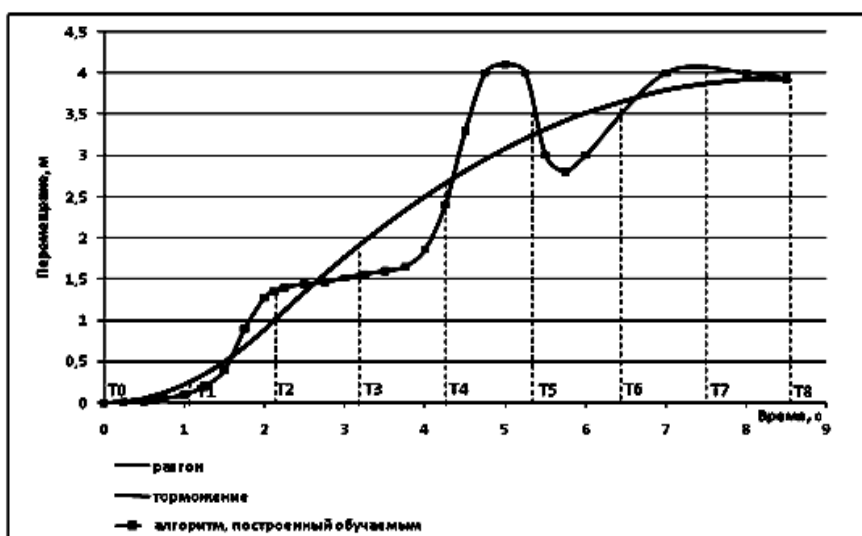


Рис. 5. Сравнение функций выходных данных эталонного алгоритма и алгоритма, построенного обучаемым

Определим период дискретизации функции обучаемого, используя анализ ее спектральной характеристики (рис. 6).

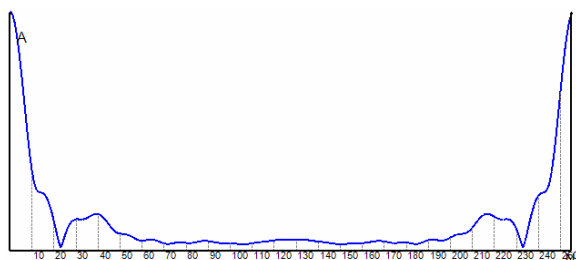


Рис. 6. Спектральная характеристики выходной функции алгоритма, построенного обучаемым

Из рис. 7 видно, что график площадей спектральных характеристик вошел в установившийся режим при  $N=140$ .

Используя формулы (5) и (6) определяем, что  $T_0 \leq 0.0303$  с. Для эталонной характеристики  $T_0 \leq 0.0327$  с, поэтому ограничимся периодом дис-

кретизации, равным 0.0303 с.

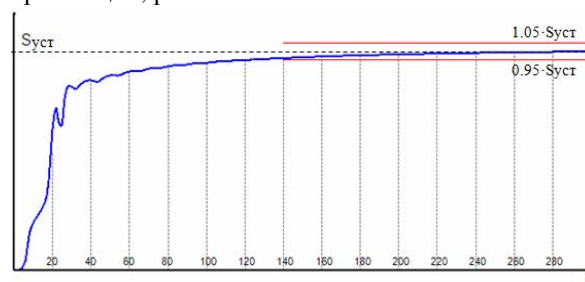


Рис. 7. График площадей спектральных характеристик

Определим среднее абсолютное отклонение функций.

$$MAD = \frac{1}{281} \sum_{i=0}^{280} |X_3(i \cdot 0.0303) - X_0(i \cdot 0.0303)| = 0.48m.$$

Выбор периода дискретизации с помощью разработанного метода анализа спектральной характеристики привел к тому, что определенное значение  $MAD=0.48m$ , что почти в три раза превышает пока-

затель MAD, определенный при  $T_0=1.06c$ .

Полученное значение отклонения отражает действительную разницу в значениях характеристик, учитывая существенные отклонения функций в точках экстремумов, и позволяет принять корректное решение о неправильной работе математической модели обучаемого и необходимости начала работы внутреннего цикла.

Время работы метода составило около 0.031с, и поэтому определение правильности алгоритма обучаемого не вызовет заметной задержки в выполнении ИКОП.

### Заключение

В результате проведенного исследования был разработан метод определения адекватности работы алгоритма обучаемого по построению математической модели физического процесса по сравнению с эталонным решением.

Метод основан на определении среднего абсолютного отклонения выходных характеристик пользовательского и эталонного алгоритмов с некоторым корректным периодом дискретизации. Вычисление периода дискретизации основано на использовании анализа спектральных характеристик выходных данных алгоритмов, получаемых после применения к ним алгоритма Cooley-Tukey БПФ. Работа метода была продемонстрирована на примере решения задачи построения математической модели процесса движения инерционной машинки по наклонной плоскости с ее остановкой на горизонтальном участке. Разработанный метод показал высокую эффективность в определении правильности работы алгоритмов, построенных обучаемыми, и может быть использован для широкого круга технических задач,

предполагающих построение математических моделей системы и получение ее временных характеристик.

### Список литературы

1. VanLehn K. *The Behavior of Tutoring Systems* / K. VanLehn // *International journal of Artificial intelligence in education*. – 2006. – Volume 16, Issue 3. – P. 227-265.
2. Кулик А.С. *Лабораторный практикум по курсу "Введение в аэрокосмическую технику" (часть 2). Объект моделирования: "Инерционная машина": учеб. пособие* / А.С. Кулик, С.Н. Пасичник; Мин-во образования и науки Украины, Нац. аэрокосмич. ун-т. – Х.: Нац. аэрокосмич. ун-т, 2008. – 55 с.
3. Чухрай А.Г. *Метод реализации внутреннего цикла в компьютерном обучении алгоритмизируемым задачам* / А.Г. Чухрай, С.И. Педан // *Системи управління та зв'язку: Збірник наукових праць*. – К.: ДП «ЦНДІ НІУ», 2010. – Вип. (16). – С. 207-213.
4. VanLehn K. *The Andes Physics Tutoring System: Lessons Learned* / Kurt Vanlehn, Collin Lynch, Kay G. Schulze, Joel A. Shapiro, Robert Shelby, Linwood Taylor, Donald Treacy, Anders Weinstein, Mary Wintersgill // *International journal of Artificial intelligence in education*. – 2005. – Volume 15, Issue 3. – P. 147-204.
5. *Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона* / М.А. Басараб, Е.Г. Зелкин, В.Ф. Кравченко, В.П. Яковлев. – М.: Радиотехника, 2004. – 72 с.
6. Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов* / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2006. – 751 с.
7. Cooley J.W. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series* / James W. Cooley, John W. Tukey // *Math. Comp.* – 1965. – Volume 19. – P. 297-301.

Поступила в редколлегию 14.06.2011

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

### МЕТОД АВТОМАТИЧНОГО ПОРІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ФІЗИЧНОГО ОБ'ЄКТУ В КОМП'ЮТЕРНІЙ НАВЧАЮЧІЙ ПРОГРАМІ

А.Г. Чухрай, С.І. Педан

Описано розробку методу автоматичного порівняння математичних моделей фізичного об'єкту на прикладі інерційної машинки. Вибір періоду дискретизації порівняння вихідних даних математичних моделей здійснений шляхом аналізу їхніх спектральних характеристик. Описано процес одержання спектральних характеристик шляхом застосування методів дискретного перетворення Фур'є. Тестування розробленого методу показало його високу ефективність при забезпеченні роботи комп'ютерної навчальної програми й можливість застосування методу для широкого кола технічних задач.

**Ключові слова:** комп'ютерна навчальна програма, внутрішній цикл, компонент компетенції, математична модель, дискретне перетворення Фур'є, спектральна характеристика.

### METHOD OF PHYSICAL OBJECT MATHEMATICAL MODELS COMPARISON IN COMPUTER TUTORING PROGRAM

A.G. Chukhray, S.I. Pedan

Development of physical object mathematical models comparison on example of inertial machine is described. The choice of sampling period of mathematical models output data comparison is implemented due to analysis of their spectral characteristics. Process of spectral characteristics reception by discrete Fourier transformation methods use is described. Testing of the developed method has shown its high efficiency at computer tutoring program execution support and possibility of method application a wide range of technical problems.

**Keywords:** computer tutoring program, inner loop, competence component, mathematical model, discrete Fourier transformation, spectral characteristic.

