УДК 519.213

В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев

Харьковский институт банковского дела
Университета банковского дела НБУ (Киев), Харьков

УПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Введено понятие управления функцией распределения случайной величины. Показано, что управляющее воздействие на параметры функции распределения должно быть пропорционально эластичности функции распределения случайной величины по управляющим параметрам – математическому ожиданию и среднеквадратическому отклонению. Получены выражения эластичности для законов распределения минимального значения, гиперболического косинуса, нормального распределения.

Ключевые слова: *функция эластичности, распределение минимального значения, распределение гиперболического косинуса, нормальное распределение.*

Введение и анализ литературы

В задачах теории надёжности объектов самой различной природы рассматривают такую задачу. Для случайной величины X произвольной физической природы задана функция распределения $F(X;\Theta)$ и плотность распределения $f(X;\Theta)$, где Θ – вектор параметров. В рамках данной работы будем рассматривать одно и двухпараметрические распределения. В классической теории надёжности [1] необходимо оценить вероятность безотказной работы

$$P(x) = \int_{x}^{\infty} f(x;\Theta)dx \,, \qquad (1)$$

или вероятность отказа

$$Q(x) = \int_{0}^{x} f(x;\Theta)dx \,. \qquad (2).$$

Из (1) и (2) следует, что

$$Q(x) = 1 - F(x).$$

В том случае, когда вычисленные значения величин $P(x)$ и $Q(x)$ не соответствуют требуемым, рекомендуется поступать следующим образом: изменить схемное решение, используя различные схемы резервирования [2] или изменить конструктивные свойства материала изделия так, чтобы выполнялись условия (1) или (2). Первый подход чаще всего применяют в том случае, когда можно пренебречь физическими свойствами изделий. При этом ухудшаются их массогабаритные характеристики. Чаще всего такой подход выбирают при проектировании объектов радиоэлектроники. Второй подход применяют при оценке надёжности тех изделий, для которых невозможно пренебречь особенностями процессов, происходящих в них под влиянием внешней среды, например в механических конструкциях. В работах [3, 4] сделана попытка оценить экономическую эффективность каждого из указанных способов повышения надёжности или последствия их совместного применения. В работе [5] изложен метод численного определения оценки чувствительности показателей надёжности к изменению конструктивных свойств материала в случае их нормального распределения.

Постановка задачи. Пусть объектом управления будет известная функция распределения $F(X;\Theta)$. Примем, что по условию задачи известна в явном виде зависимость

$$\Theta = \theta(M) \,,$$

где M – вектор числовых характеристик данного распределения. Без ограничения общности предположим, что M=2.

Предположим, что зависимость числовых характеристик распределения: математического ожидания m и дисперсии σ^2 от его параметров θ_1, θ_2 известна и имеет вид:

$$\begin{aligned} m &= \phi(\theta_1, \theta_2); \\ \sigma^2 &= \varphi(\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \qquad (3)$$

Решая систему (3) в явном или численном виде относительно θ_1, θ_2, получим выражения вида:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= u(m, \sigma^2); \\ \hat{\theta}_2 &= v(m, \sigma^2). \end{aligned} \qquad (4)$$

В условиях (4) «шапочка» над символом означает, что берётся оценка соответствующей величины. Тогда функция распределения $F(X;\Theta)$ примет вид:

$$F(X;\Theta) = F(x,\theta_1,\theta_2) = \\ = F(x; u(m,\sigma^2), v(m,\sigma^2)). \tag{5}$$

Плотность распределения, с учётом выражения (4), примет вид:

$$f(X;\Theta) = f(x,\theta_1,\theta_2) = \\ = f(x; u(m,\sigma^2), v(m,\sigma^2)). \tag{6}$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть начальное значение вероятности безотказной работы равно величине

$$P_1(x) = 1 - F_1(x; u(m_1, \sigma_1^2), v(m_1,\sigma_1^2)). \tag{7}$$

Для того, чтобы увеличить вероятность безотказной работы до величины

$$P_2(x) = 1 - F_2(x; u(m_2, \sigma_2^2), v(m_2,\sigma_2^2)) \tag{8}$$

есть следующие, имеющие физический смысл, возможности:

– увеличить математическое ожидание лимитирующего свойства, то есть сделать так, чтобы выполнялось условие $m_2 > m_1$;

– уменьшить среднеквадратическое отклонение (дисперсию) лимитирующего свойства, то есть сделать так, чтобы $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$;

– совместное применение каждого из этих подходов.

Примем, что:

– нам известны плотность распределения случайной величины X и (или) её функция распределения, и численные значения параметров этих функций;

– нам известен способ определения квантилей указанных распределений;

– нам известна технология, обеспечивающая изменение величины математического ожидания и среднеквадратического отклонения определяющего свойства.

Для дальнейшего рассмотрения задачи примем, что статистические свойства внешней, по отношению к изделию среды, в рамках решения данной задачи неизменны.

Требуется определить величину управляющего воздействия (вектора приращения ΔM) для обеспечения требуемого уровня надёжности.

Изложение результатов

Для решения поставленной задачи воспользуемся известными в теории автоматического управления [6] функциями чувствительности и функциями эластичности, применяющимися при исследовании систем различной природы. Относительной чувствительностью или эластичностью $E_x(y)$ функции $y(x)$ по переменной x называют выражение вида:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = x\frac{d}{dx}\ln y. \tag{9}$$

Для упрощения записи дальнейших преобразований примем, что $E_x(y) = E(x)$. Такая запись допустима потому, что в нашем случае функцию эластичности $E_x(y)$ можно представить в виде явной функции аргумента x.

Отсюда следует, что дифференциальное уравнение, необходимое для управления функцией $y(x)$, примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = E_x(y)\cdot\frac{y}{x} \tag{10}$$

при начальных условиях: $y=y_0$ при $x=x_0$.

Разделяя в условии (10) переменные, получим выражение вида:

$$\frac{dy}{y} = \frac{E(x)dx}{x} \tag{11}$$

или

$$y = C\exp\left(\int \frac{E_x(y)}{x}dx\right). \tag{12}$$

Приняв начальные условия $y = y_0$ при $x = x_0$ получим, что:

$$C = \frac{y_0}{\exp\left(\int \frac{E_{x_0}(y_0)}{x_0}dx\right)}. \tag{13}$$

Окончательно получим, что:

$$y = \frac{y_0}{\exp\left(\int \frac{E_{x_0}(y_0)}{x_0}dx\right)}\exp\left(\int \frac{E_x(y)}{x}dx\right). \tag{14}$$

Для удобства дальнейшего изложения представим функцию (5) в виде:

$$\Pi(X;\Theta) = F(x;m,\sigma^2) \tag{15}$$

или

$$\Pi_1(X;\Theta) = F(x;m,\sigma). \tag{16}$$

Рассмотрим задачу управления функцией распределения случайной величины X как задачу управления неким технологическим процессом. Функции (15) или (16), описывающие распределение лимитирующего свойства материала изделия – функции трёх переменных: x, m, σ. Таким образом, для выбора рационального технологического решения необходимо определить функции эластичности по каждой из переменных функций (15) или (16) и их взаимные эластичности.

В первом случае следует выбрать для управления процессом изменения свойств функции распределения те переменные, которые имеют наибольшую эластичность. В некоторых случаях, исходя из особенностей задачи, может возникнуть потребность в оценке взаимного влияния переменных между собой, в этом случае следует использовать взаимную эластичность для оценки возможного компенсаторного влияния переменных на конечный результат.

Определим эластичность $E_x(F)$ функции распределения $F(x)$ случайной величины X, имеющей плотность распределения $f(x)$.

В соответствии с (9) получим, что:

$$E_x(F) = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{x}{F} = f(x)\frac{x}{F}. \tag{17}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие свойства функции эластичности, доказательство которых приведены в работе[7]. Пусть $u = u(x), v = v(x)$, тогда:

1. Если $Y = uv$, то
$$E_x(y) = E_x(u) + E_x(v);$$
2. Если $y = \frac{u}{v}$, то
$$E_x(y) = E_x(u) - E_x(v);$$
3. Если $y = x + C$, то
$$E_x(y) = \frac{x}{x+C}.$$
4. Если $y = u + v$, то
$$E_x(y) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}.$$

Определим эластичность функции интенсивности отказов

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}. \tag{18}$$

Из свойств функции эластичности следует, что:

$$E_x(\lambda) = E_x(f(x)) - E_x(1-F(x)). \tag{19}$$

Из свойств 1…4 следует, что

$$E_x(1-F(x)) = -\frac{xf(x)}{1-F(x)} = -x\lambda(x), \tag{20}$$

следовательно:

$$E_x(\lambda(x) = x\left[\frac{d}{dx}\ln f(x) + \lambda(x)\right]. \tag{21}$$

В тех случаях, когда выполнение в аналитическом виде описанных операций невозможно, следует использовать численные методы. Для решения поставленных в данной работе задач наиболее ответственной будет операция численного определения эластичности, поэтому рассмотрим её подробнее.

Для грубой оценки величины эластичности, согласно работе [8], будем использовать выражение вида:

$$E_x(y) = \left(\frac{y(x_1) - y(x_0)}{y(x_0)}\right) \Big/ \left(\frac{x_1 - x_0}{x_0}\right) \tag{22}$$

или

$$E_x(y) = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right) \Big/ \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \tag{23}$$

Для определения функции эластичности с повышенной точностью можно использовать любые формулы численного дифференцирования. Пример численного определения функции эластичности нормального распределения по переменной x приведен в работе [9].

Рассмотрим применение аналитического определения эластичности по параметрам функции распределения непрерывной случайной величины в некоторых важных для практики случаях.

Оценим эластичность по параметрам в том случае, когда случайная величина X подчинена распределению минимального значения. Такое распределение встречается при определении надёжности объектов, в которых отказ наступает в следствии хрупкого разрушения [10].Функция этого распределения имеет вид:

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right). \tag{24}$$

В условии (24) параметрами распределения служат величины μ – параметр положения и λ – параметр масштаба. С математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением σ эти величины связаны условиями:

$$m = \mu - \lambda\gamma, \tag{25}$$

где γ – постоянная Эйлера, равная величине 0,5772 и

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\lambda = 1,2825\lambda. \tag{26}$$

Откуда получим, что:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0,7797\cdot\sigma, \\ \mu &= m + 0,4501\cdot\sigma. \end{aligned} \tag{27}$$

В соответствии с (4, 5, 9, 17) получим, что условие (24) примет вид:

$$\begin{aligned} &F_1(x; m, \sigma) = \\ &= 1 - \exp\left(0,5614\exp\left(1,2855\frac{x}{\sigma} - 1,2825\frac{x}{\sigma}\right)\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Эластичность функции плотности вероятности функции (24) по математическому ожиданию примет вид:

$$E_m(F_1(x)) =$$

$$(-A_1)\cdot\frac{m}{1-e^{-0,5614e^{1,2855\frac{x}{\sigma}-1,2825\frac{m}{\sigma}}}}, \qquad (29)$$

при условии, что:

$$A_1 =$$

$$=\frac{0,7199e^{-0,5614e^{1,2855\frac{x}{\sigma}-1,2825\frac{m}{\sigma}}+1,2855\frac{x}{\sigma}-1,2825\frac{m}{\sigma}}}{\sigma}. \qquad (30)$$

Эластичность функции плотности вероятности функции (24) по среднеквадратическому отклонению примет вид:

$$E_\sigma(F_1(x) =$$

$$\frac{0,0008421\exp B\cdot(855m-857x)}{\sigma(\exp(0,5614\exp B)-1)}, \qquad (31)$$

где

$$B = 1,2855\frac{x}{\sigma}-1,2825\frac{m}{\sigma}. \qquad (32)$$

Проанализируем физический смысл полученных в (29) и (31) результатов. Так как $E_m(F_1(x))<0$ и принимая во внимание условие (7), получим, что увеличение среднего значения изучаемого свойства материала способствует повышению надёжности изделия. Из условия (31) следует, что уменьшение среднеквадратического отклонения этого же свойства приводит к такому же результату.

В некоторых задачах, связанных с оценкой риска, находит применение распределение гиперболического косинуса [10]. Функция этого распределения имеет вид:

$$F_2(x) = \frac{2}{\pi}\text{arctg}e^{\alpha(x-\mu)},\ -\infty<x<\infty. \qquad (33)$$

Параметры распределения α и μ с основными числовыми характеристиками связаны условиями:

$m = \mu$, $\alpha = 1,5708\ \sigma^{-1}$.

Тогда эластичность функции распределения (33) по среднему значению m примет вид:

$$E_m(F_2(x)) = A_2A_3, \qquad (34)$$

при условии, что:

$$A_2 = -\frac{57,2941e^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\sigma}+\frac{m}{\sigma}\right)}}{\sigma\left(e^{\frac{\pi x}{\sigma}}+e^{\pi\frac{m}{\sigma}}\right)}, \qquad (35)$$

$$A_3 = \frac{m}{0,6366\text{arctg}\left(e^{\frac{1.5708}{\sigma}(x-m)}\right)}. \qquad (36)$$

Эластичность функции плотности вероятности функции (33) по среднеквадратическому отклонению примет вид:

$$E_\sigma F_2(x) = \frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\sigma}+\frac{m}{\sigma}\right)}(m-x)}{\sigma\left(e^{\frac{\pi x}{\sigma}}+e^{\frac{\pi}{2}\frac{m}{\sigma}}\right)\text{arctg}\left(e^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\frac{m}{\sigma}\right)}\right)}. \qquad (37)$$

Заметим, что физический смысл выражений (34), вследствие выражения (35) такой же, как (29) и (31).

Рассмотрим одно из важнейших распределений – нормальное, определённое функцией распределения (38) и плотностью распределения (39):

$$\Phi\ (x,m.\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}dx, \qquad (38)$$

$$\varphi(x,m.\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}. \qquad (39)$$

В работе [10] приведено приближение $\Phi^*(x,m.\sigma)$ для вычисления функции нормального распределения, имеющее вид:

$$\Phi^*(x,m.\sigma) = 1\text{-}\ \varphi(x,m.\sigma)V(x,m,\sigma), \qquad (40)$$

где

$$V(x,m,\sigma) = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{\left(1+p\frac{x-m}{\sigma}\right)^i}. \qquad (41)$$

Примем, что:

$$W(x,m,\sigma) = \varphi(x,m,\sigma)V(x,m,\varphi). \qquad (42)$$

Тогда из свойств (1) – (4) функции эластичности следует следующая цепочка преобразований:

$$E_m(\Phi^*) = E_m(1-W(m)) = \\ = -\frac{W(m)E_m(W(m))}{1-(W(m))}. \qquad (43)$$

Следовательно:

$$E_m(W(m)) = E_m, \\ ((\varphi(m)V(m)) = \\ = E_m(\varphi(m)) + E_m(V(m)). \qquad (44)$$

Откуда следует, что:

$$E_m(\varphi(m)) = \frac{d}{dm},$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})\cdot\frac{m}{\varphi(m)} = \\ = \frac{m(x-m)}{\sigma^2} = v^{-1}t. \qquad (45)$$

Приняв, что:

$$v = \sigma/m, \qquad t = \frac{x-m}{\sigma} \tag{46}$$

получим возможность выразить эластичность функции плотности нормального распределения по математическому ожиданию в виде произведения величины, обратной коэффициенту вариации на величину нормированной переменной.

Пусть

$$Z_i = \frac{a_i}{\left(1+p\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right)^i}; \quad i=1,2,3. \tag{47}$$

Тогда:

$$E_m(V(m)) = \frac{S}{R} = \frac{Z_1E_{z1}(m)+Z_2E_{z2}(m)+Z_3E_{z3}(m)}{Z_1+Z_2+Z_3}, \tag{48}$$

$$\frac{c\sigma^3}{px^3 - 3\cdot mpx^3 + 3m^2px - m^3p + \sigma^3} + \\ + \frac{b\sigma^2}{(px-mp+\sigma)^2} + \frac{a\sigma}{px - m\cdot p + \sigma} \tag{49}$$

числитель

$$S = (-1)\cdot\sum_{i=1}^{3}\left(i + \frac{i(px+\sigma}{mp-px-\sigma}\right). \tag{50}$$

Заметим, что и в этом случае величина

$$E_m(V(m)) < 0.$$

Выводы

1. Введено понятие управления функцией распределения случайной величины.

2. Показано, что управляющее воздействие на параметры функции распределения должно быть пропорционально эластичности функции распределения случайной величины по управляющим параметрам – математическому ожиданию и среднеквадратическому отклонению.

3. Получены выражения эластичности для законов распределения минимального значения, гиперболического косинуса, нормального распределения.

Список литературы

1. .Зависимость показателей надёжности комплектующих изделий от внешних воздействующих факторов // Надёжность и эффективность в технике: Справочник. В 10т. – М.: Машиностроение, 1990. Т.10: Справочные данные по условиям эксплуатации и характеристикам надёжности / Под ред.В.А. Кузнецова.

2. Ллойд Д.К. Надёжность. Организация исследования, методы, математический аппарат / Д.К. Ллойд, М. Липов. – М.: Сов. радио, 1964. – 644 с.

3. Эдельман В.И. Надёжность технических систем: экономическая оценка / В.И. Эдельман. – М.: Мир, 1988. – 151 с.

4. Кулаков Н.Н. Методы оценки повышения технической надёжности изделий по технико-экономическим показателям / Н.Н. Кулаков, А.О. Загоруйко. – Новосибирск: Наука, 1969. – 141 с.

5. Капур К. Надёжность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон. – М.: Мир, 1980. – 351 с.

6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

7. Солодовников А.С. Математика в экономике: В 2-х частях. Ч. 2 / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандура. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 376 с.

8. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: Изд. «Дело и Сервис», 1999. – 368 с.

9. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ / В.П. Дьяконов. – М.: Наука, 1987.

10. Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев, Г.П. Филей. – К.: Наукова Думка, 1992. – 252 с.

Поступила в редколлегию 8.06.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры, Харьков.

УПРАВЛІННЯ ФУНКЦІЄЮ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

В.Ю. Дубницький, О.І. Ходирєв

Запропоновано поняття управління функцією розподілу випадкової величини. Показано, що керуюча дія, яка впливає на параметри функції розподілу, повинна бути пропорційна еластичності функції розподілу випадкової величини по параметрах-математичному сподіванню і середньоквадратичному відхиленню. Отримані вирази еластичності для законів розподілу мінімального значення, гіперболічного косинуса, нормального розподілу.

Ключові слова: *функція еластичності, розподіл мінімального значення, розподіл гіперболічного косинуса, нормальний розподіл.*

MANAGEMENT FUNCTION OF DISTRIBUTING OF CASUAL SIZE

V.Yu. Dubnitsky, A.I. Khodirev

A concept was introduced of a random value distribution function control. The control action of distribution function parameters was shown to be proportional to elasticity of a random value distribution function along control parameters, i.e., expectation and standard deviation. Elasticity expressions were obtained for distribution laws of minimum value, hyperbolic cosine, normal distribution.

Keywords: *elasticity function, minimum value distribution, hyperbolic cosine distribution, normal distribution.*