

УДК 623.4.011

А.Б. Скорик<sup>1</sup>, О.В. Гаврентюк<sup>1</sup>, А.А. Скорик<sup>2</sup>, А.М. Доска<sup>1</sup><sup>1</sup> Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков<sup>2</sup> Национальный университет радиоэлектроники, Харьков

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОРТОВОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЯ ЗУР. ЧАСТЬ 2. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАВЕДЕНИЯ ЗУР НА ЭТАПЕ ИНЕРЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В статье рассматриваются вопросы построения математической модели функционирования бортового вычислителя ЗУР с комбинированным наведением (инерциальное с радиокоррекцией + полуактивное самонаведение). Приводятся основные математические соотношения и алгоритмы выработки команд наведения ЗУР при реализации инерциального управления с радиокоррекцией. Анализируются особенности управления ракетой при реализации "командно-инерциального метода наведения".

**Ключевые слова:** модифицированный метод пропорционального наведения, бортовой вычислитель, командно-инерциальный метод наведения, матрица направляющих косинусов, радиокоррекция.

### Введение

#### Постановка проблемы и анализ литературы.

В работе продолжается рассмотрение вопросов построения математической модели бортового вычислителя современных зенитных ракет (на примере ЗУР 9М83, используемой в ЗРК С-300В), поднятых в первой части статьи [1].

Вопросы построения и моделирования бортовой аппаратуры современных зенитных ракет наиболее подробно изложены в работе [2].

Актуальность данной тематики связана с тем, что в настоящее время отсутствуют единые подходы к описанию и классификации инерциальных систем с радиокоррекцией, используемых в современных и перспективных управляемых ракетах.

**Цель статьи.** Рассмотрение математической модели функционирования бортового вычислителя ЗУР с комбинированным наведением (инерциальное с радиокоррекцией + полуактивное самонаведение). Анализ основных математических соотношений и алгоритмов, описывающих функционирование бортового вычислителя ЗУР на этапе инерциального управления.

### Основной материал

При моделировании функционирования системы наведения ЗУР в режиме *инерциального управления с радиокоррекцией*, дополнительно к рассмотренным в [1] 4-м системам координат: ЗСК, ЗСК-ПУ, ИСК-Р и РСК, необходимо использовать *лучевую СК (ЛСК)*. Переход от этапа *склонения* к этапу *инерциального управления* определяется рядом условий.

При падении давления в стартовом двигателе до 0,8 кгс/см<sup>2</sup> *сигнализаторы спада давления* выдают сигнал в БВУ, где формируется команда

"ОБНУЛЕНИЕ" отключающая команды управления по углу склонения.

$$\lambda_{ур}^{СКЛ} = \lambda_{зр}^{СКЛ} = 0. \quad (1)$$

Такие действия необходимы для обнуления угла атаки ракеты, что обеспечивает минимизацию колебаний корпуса ракеты при отходе стартовой ступени. По команде с БВУ специальный пороховой заряд, детонируя, разрезает стенку отсека и происходит разделение маршевой ступени и отделяемой части стартовой ступени. В момент разделения формируется команда "СБРОС" и далее, в течении 0,4с выдается команда на запуск маршевого двигателя. По истечении установленного времени (0,4с) БВУ выдает команду НИУ (начало инерциального управления).

Следует отметить, что в ЗУР 9М83 на этапе *инерциального управления* (также как и при самонаведении) применяется *модифицированный пропорциональный метод наведения*. Для его реализации используются координаты ракеты, рассчитываемые по данным инерциальной системы, и экстраполированные координаты цели.

В полетном задании для БВУ и в командах радиокоррекции координаты цели задаются в ЗСК-ПУ. В БВУ координаты цели пересчитываются в ИСК-Р (значение матрицы Р приведено в 1-й части статьи [1]):

$$\begin{pmatrix} x_{цу}(t_n) \\ y_{цу}(t_n) \\ z_{цу}(t_n) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{цг}(t_k) \\ y_{цг}(t_k) \\ z_{цг}(t_k) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{цу}(t_n) \\ \dot{y}_{цу}(t_n) \\ \dot{z}_{цу}(t_n) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dot{x}_{цг}(t_k) \\ \dot{y}_{цг}(t_k) \\ \dot{z}_{цг}(t_k) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $x_{цц}, y_{цц}, z_{цц}, \dot{x}_{цц}, \dot{y}_{цц}, \dot{z}_{цц}$  – координаты и скорость цели в ИСК-Р;

$x_{цг}, y_{цг}, z_{цг}, \dot{x}_{цг}, \dot{y}_{цг}, \dot{z}_{цг}$  – координаты и скорость цели в ЗСК-ПУ.

Далее, в ИСК-Р производится экстраполяция координат цели

$$\bar{V}_{цц} = \begin{vmatrix} \dot{x}_{цц}(t_n) \\ \dot{y}_{цц}(t_n) \\ \dot{z}_{цц}(t_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_{цц}(t_k) \\ \dot{y}_{цц}(t_k) + Q_{бц}(t_n - t_k) \\ \dot{z}_{цц}(t_k) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\bar{r}_{цц} = \begin{vmatrix} x_{цц}(t) \\ y_{цц}(t) \\ z_{цц}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{цц}(t_k) + \dot{x}_{цц}(t_k)(t - t_k) \\ y_{цц}(t_k) + \dot{y}_{цц}(t_k)(t - t_k) \\ z_{цц}(t_k) + \dot{z}_{цц}(t_k)(t - t_k) \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$t_n \geq t_k,$

где  $Q_{бц} = \begin{cases} -9,8 & \text{для БЦ;} \\ 0 & \text{в ост. случаях;} \end{cases}$   $\bar{r}_{цц}, \bar{V}_{цц}$  – вектора

дальности до цели и скорости цели в проекциях на оси ИСК-Р;  $t_k$  – момент поступления первого слова последней радиокоррекции.

Вектор относительной дальности между целью и ракетой  $\Delta \bar{r}$ , или, что то же самое, радиус-вектор цели в лучевой системе координат определится как:

$$\Delta \bar{r} = \Delta \bar{r}_{цц} - \Delta \bar{r}_{рл}, \quad (6)$$

или в проекциях на ИСК-Р:

$$\Delta \bar{r} = \begin{vmatrix} x_{цц} - x_{рл} \\ y_{цц} - y_{рл} \\ z_{цц} - z_{рл} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Аналогично находится относительная скорость сближения ракеты с целью

$$\bar{V}_{отн} = \begin{vmatrix} \dot{x}_{цц} - \dot{x}_{рл} \\ \dot{y}_{цц} - \dot{y}_{рл} \\ \dot{z}_{цц} - \dot{z}_{рл} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta \dot{x}_u \\ \Delta \dot{y}_u \\ \Delta \dot{z}_u \end{vmatrix}. \quad (8)$$

В процессе автономного наведения ракеты параметры движения цели могут изменяться. Данные изменения фиксируются МСНР, после чего уточненные координаты цели передаются на борт ракеты в составе команд радиокоррекции:

$$\bar{r}_{цг} = [x_{цг} y_{цг} z_{цг}]^T,$$

$$\bar{V}_{цг} = [\dot{x}_{цг} \dot{y}_{цг} \dot{z}_{цг}]^T.$$

В условиях, когда противник ставит активные помехи РГС ЗУР возникает необходимость удлинить этап инерциального наведения с радиокоррекцией. В этом случае в ЗРК используется командно-инерциальный метод наведения (КИМ). При использовании инерциального наведения с радиокоррекцией ошибка наведения со временем возрастает, в первую очередь, за счет ошибок измерения коор-

динат ракеты инерциальной системой. В режиме КИМ координаты цели и координаты ракеты измеряются МСНР. Это позволяет в командах радиокоррекции, для уменьшения ошибок, передавать относительные координаты цели и ракеты в ЗСК-ПУ.

$$\Delta \bar{r}_g = \begin{vmatrix} x_{цг} - x_{рг} \\ y_{цг} - y_{рг} \\ z_{цг} - z_{рг} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta x_g \\ \Delta y_g \\ \Delta z_g \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$\bar{V}_{отн.g} = \begin{vmatrix} \dot{x}_{цг} - \dot{x}_{рг} \\ \dot{y}_{цг} - \dot{y}_{рг} \\ \dot{z}_{цг} - \dot{z}_{рг} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta \dot{x}_g \\ \Delta \dot{y}_g \\ \Delta \dot{z}_g \end{vmatrix}. \quad (10)$$

В данном режиме для расчета  $\Delta \bar{r}$  и  $\bar{V}_{отн}$  выражения (2) – (8) не используются, а сразу решается задача перерасчета относительных координат цели из ЗСК-ПУ в ИСК-Р.

$$\Delta \bar{r} = P \cdot \Delta \bar{r}_g, \quad (11)$$

$$\bar{V}_{отн} = P \cdot \bar{V}_{отн.g}. \quad (12)$$

Расстояния от ракеты до цели –  $\ell$  и скорость изменения расстояния от ракеты до цели –  $\dot{\ell}$  вычисляются следующим образом:

$$\ell(t_i) = \sqrt{\Delta x_u^2(t_i) + \Delta y_u^2(t_i) + \Delta z_u^2(t_i)}, \quad (13)$$

$$\dot{\ell}(t_i) = (\Delta x_u \Delta \dot{x}_u + \Delta y_u \Delta \dot{y}_u + \Delta z_u \Delta \dot{z}_u) / \ell(t_i). \quad (14)$$

Одной из особенностей формирования команд наведения ЗУР является то, что модель относительного движения ракеты и цели рассчитывается в ИСК-Р, требуемое ускорение –  $W_{тр}$ , определяемое используемым методом наведения, рассчитывается в лучевой системе координат, а команды управления ракетой –  $\lambda_{р}^{ину}$  необходимо пересчитывать в РСК.

Лучевая система координат ( $Ox_{л}y_{л}z_{л}$ ) формируется путем разворота осей ИСК-Р на углы  $\beta_{л}$  и  $\epsilon_{л}$  (рис. 1) таким образом, чтобы положительное направление оси  $Ox_{л}$  совпадало с направлением на цель (линией дальности).

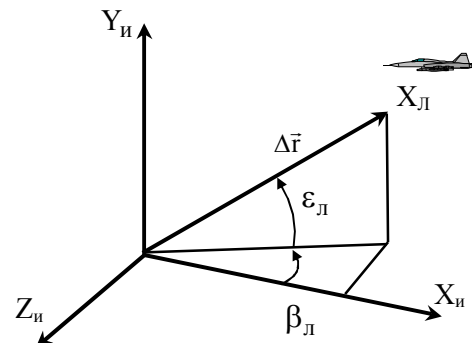


Рис. 1. Преобразование систем координат: ИСК – Р → ЛСК

При нахождении матрицы направляющих косинусов А, задающей преобразование из ИСК-Р в ЛСК, последовательность вращения должна быть следующей:

1) преобразование  $A_\beta$  – поворот ИЗСК относительно оси  $Y_u$  на угол  $\beta_l$ ;

2) преобразование  $A_\epsilon$  задает поворот относительно нового положения оси  $Z'_u$  на угол  $\epsilon_l$ .

Проекция вектора в ЛСК связаны с его проекциями в ИСК-Р соотношением

$$\begin{pmatrix} \Delta x_l \\ \Delta y_l \\ \Delta z_l \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_l \\ \Delta \dot{y}_l \\ \Delta \dot{z}_l \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_u \\ \Delta \dot{y}_u \\ \Delta \dot{z}_u \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Связь между проекциями вектора в ЛСК и РСК задается выражением, определяемым как последовательность преобразования  $A^{-1}$  из ЛСК в ИСК-Р и далее, преобразования  $C^{-1}$  из ИСК-Р в РСК [1]:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = C^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрицы А и С являются ортогональными, поэтому их обратные матрицы равны транспонированным, т.е.

$$A^{-1} = A^T, \quad C^{-1} = C^T.$$

С учетом сказанного, матрицы направляющих косинусов А и В могут быть представлены в следующем виде.

$$A = A_\epsilon A_\beta = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_l & \sin \epsilon_l & 0 \\ -\sin \epsilon_l & \cos \epsilon_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_l & 0 & -\sin \beta_l \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_l & 0 & \cos \beta_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_l \cos \beta_l & \sin \epsilon_l & -\cos \epsilon_l \sin \beta_l \\ -\sin \epsilon_l \cos \beta_l & \cos \epsilon_l & \sin \epsilon_l \sin \beta_l \\ \sin \beta_l & 0 & \cos \beta_l \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$B = C^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{10} & B_{20} \\ B_{01} & B_{11} & B_{21} \\ B_{02} & B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \epsilon_l \cos \beta_l & -\sin \epsilon_l \cos \beta_l & \sin \beta_l \\ \sin \epsilon_l & \cos \epsilon_l & 0 \\ -\cos \epsilon_l \sin \beta_l & \sin \epsilon_l \sin \beta_l & \cos \beta_l \end{pmatrix}.$$

Способ вычисления коэффициентов  $c_{ij}$  приведен в работе [1], коэффициенты матрицы А определяются следующими выражениями:

$$\sin \epsilon_l = \frac{\Delta y_u}{\ell}, \quad (19)$$

$$\sin \beta_l = -\frac{\Delta z_u}{\sqrt{\Delta z_u^2 + \Delta x_u^2}}, \quad (20)$$

$$\cos \epsilon_l = \frac{\sqrt{\Delta x_u^2 + \Delta y_u^2}}{\ell}, \quad (21)$$

$$\cos \beta_l = \frac{\Delta x_u}{\sqrt{\Delta x_u^2 + \Delta z_u^2}}. \quad (22)$$

Вычисление значения команд управления ракетой на этапе *инерциального с радиокоррекцией управления* целесообразно осуществлять в несколько приемов.

Первоначально осуществляется вычисление команд управления  $\hat{\lambda}_{yp}$ ,  $\hat{\lambda}_{zp}$  с использованием закона пропорционального сближения в лучевой системе координат.

$$\hat{\lambda}_{yp} = \Phi_1(p) \left| \dot{\ell} \right| \omega_{zl}; \quad (23)$$

$$\hat{\lambda}_{zp} = \Phi_1(p) \left| \dot{\ell} \right| \omega_{yl}; \quad (24)$$

где  $\Phi_1 = \frac{1}{1 + \tau_1 p}$ ;  $\tau_1 = 0,7$ .

Угловые скорости вращения в плоскостях управления ЛСК могут быть рассчитаны следующим образом

$$\omega_{yl} = -\frac{\Delta \dot{z}_l}{\ell}, \quad (25)$$

$$\omega_{zl} = -\frac{\Delta \dot{y}_l}{\ell}. \quad (26)$$

Расстояние ракета-цель  $\ell$  и скорость сближения  $\dot{\ell}$  вычисляются по формулам (13), (14). Проекция относительной скорости сближения на оси ЛСК  $\Delta \dot{y}_l$ ,  $\Delta \dot{z}_l$  рассчитываются с помощью формулы, полученной с использованием преобразования (16):

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{y}_l \\ \Delta \dot{z}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta \dot{x}_u \sin \epsilon_l \cos \beta_l + \Delta \dot{y}_u^\phi \cos \epsilon_l + \Delta \dot{z}_u \sin \epsilon_l \sin \beta_l) \\ \Delta \dot{x}_u \sin \beta_l + \Delta \dot{z}_u \cos \beta_l \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где  $k^\phi$  – коэффициент пропорциональности, вводимый в БВУ до старта;

$$\Delta y_u^\phi = \Delta y_u + \frac{k^\phi [\ell - \ell_{крз}]}{\ell},$$

$$\ell_{крз} = 21000 \text{ м};$$

$$\left| \dot{\ell} \omega_{zl} \right| \leq 512;$$

$$\left| \dot{\ell} \omega_{yl} \right| \leq 512.$$

Выражения (23), (24) описывают *классический пропорциональный метод наведения*.

Закон наведения, получаемый при учете поправок на продольное ускорение ракеты и компенса-

цію ускорення вільного падіння, називається *модифіцированим законом пропорційного наведення* (или в деяких джерелах *пропорційне зближення з зміщенням*) [2]. Зв'язок між ускореннями, розраховуваними в ЛСК і вимірюваними в РСК, визначається наступним перетворенням

$$\begin{pmatrix} W_{хл} \\ W_{ул} \\ W_{зл} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} W_{хр} \\ W_{ур} \\ W_{зр} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{00} W_{хр} + B_{01} W_{ур} + B_{02} W_{зр} \\ B_{10} W_{хр} + B_{11} W_{ур} + B_{12} W_{зр} \\ B_{20} W_{хр} + B_{21} W_{ур} + B_{22} W_{зр} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Из вираження (28) видно, що продольне ускорення ракети в відповідних площинах управління повинно компенсуватися з урахуванням поправок:  $v_{10} W_{хр}$  і  $v_{20} W_{хр}$ . Ускорення вільного падіння компенсується поправкою  $9,8 \cos \varepsilon_{л}$ .

С урахуванням виражень (17), (18) закон управління ЗУР для *модифіцированого пропорційного методу наведення* в РСК може бути представлений в наступному вигляді:

$$\lambda_{ур}^{ину} = \frac{1}{B_{00}} \left( \begin{aligned} & \left( k_0^c \hat{\lambda}_{ур} - k_1^c v_{10} W_{хр} + 9,8 \cos \varepsilon_{л} \right) B_{22} + \\ & \left( k_{ц}^c \hat{\lambda}_{зр} + v_{20} W_{хр} \right) B_{12} \end{aligned} \right), \quad (29)$$

$$\lambda_{зр}^{ину} = \frac{1}{B_{00}} \left( \begin{aligned} & \left( k_0^c \hat{\lambda}_{ур} - k_1^c v_{10} W_{хр} + 9,8 \cos \varepsilon_{л} \right) B_{21} - \\ & \left( k_{ц}^c \hat{\lambda}_{зр} + v_{20} W_{хр} \right) B_{11} \end{aligned} \right), \quad (30)$$

$$k_0^c = k_1^c + k_2^c \Delta t_{ТВ} + k_3^c \Delta t_{ТВ}^2;$$

$$\Delta t_{ТВ} = \frac{-\ell}{\ell};$$

$$k_1^c = \begin{cases} 1 & \text{для БЦ;} \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$k_2^c, k_3^c, t_{ТВ}$  с ПУ;  $k_4^c = k_1^c = 4$ ;  $v_{ij}$  визначаються з вираження (18).

Після обмеження, отримані команди використовуються для управління ракетою.

### Вывод

В статті розглянуті особливості моделювання наведення ракети на етапі *інерціального радіокорекції управління*.

Отримані результати можуть бути використані в якості навчального матеріалу.

### Список литературы

1. Скорик А.Б. Математическое моделирование бортового вычислителя ЗУР. Анализ задачи моделирования управления ЗУР с вертикальным стартом на этапе склонения / А.Б.Скорик, О.В. Гаврентюк, А.А.Скорик, П.А. Дранник // Системи озброєння і військова техніка. – 2011. – Вип. 1(25). – С. 54-57.

2. Проектирование зенитных управляемых ракет // Под ред. И.С. Голубева, В.Г.Светлова. – М.: МАИ, 1999. – 728 с.

Поступила в редколлегию 7.07.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.П. Малайчук, Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БОРТОВОГО ОБЧИСЛЮВАЧА ЗКР. ЧАСТИНА 2. АНАЛІЗ ЗАВДАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ НАВЕДЕННЯ ЗКР НА ЕТАПІ ІНЕРЦІАЛЬНА УПРАВЛІННЯ

А.Б. Скорик, О.В. Гаврентюк, О.А. Скорик, О.М. Доска

У статті розглядаються питання побудови математичної моделі функціонування бортового обчислювача ЗКР з комбінованим наведенням (інерціальне з радіокорекцією + напівактивне самонаведення). Наводяться основні математичні співвідношення та алгоритми вироблення команд наведення ЗКР при реалізації інерціального управління з радіокорекцією. Аналізуються особливості управління ракетою при реалізації "командно-інерціального методу наведення".

**Ключові слова:** модифікований метод пропорційного наведення, бортовий обчислювач, командно-інерціальний метод наведення, матриця направляючих косинусів, радіокорекція.

### MATHEMATICAL MODELLING OF SAM AIRBORNE COMPUTER. THE PART 2. ANALYSIS OF PROBLEMS OF SIMULATION MANAGEMENT AT THE STAGE OF SAM INERTIAL GUIDANCE

A.B. Skorik, O.V. Gavrentjuk, A.A. Skorik, A.M. Doska

In this paper, a mathematical model of the functioning of the onboard calculator missiles with a combined guidance (inertial with radio + semi-active homing). The basic mathematical relationships and algorithms for production teams aiming missiles at the realization of inertial with radio control. The features of missile guidance in the implementation of "command-and-inertial guidance method."

**Keywords:** modified method of proportional navigation, trip computer, command-and-inertial guidance method, the matrix of direction cosines, radiocorrection.