

УДК 389.14:53.083

С.Ф. Левин

Московский институт экспертизы и испытаний, Москва, Россия

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И КЛАССИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

*Изложены основные положения статистических методов, используемых в теории измерительных задач при классическом понимании неопределенности, и рассмотрены последствия нарушения условий их применимости в задачи идентификации космологических моделей.*

**Ключевые слова:** неопределенность в широком смысле, распределение вероятностей, измерительная задача, погрешность неадекватности, диаграмма Хаббла, уравнение Маттига.

### Введение

Теория измерительных задач – раздел фундаментальной метрологии, предметом которого являются математические задачи, решаемые путем измерений и вычислений на основе зависимостей между физическими и расчетными величинами, характеризующими свойства объектов измерений [1]. Особое место в теории измерительных задач отводится статистическим методам [2]. Актуальность статистической тематики для прикладной метрологии вызвана появлением нормативных документов, использующих при решении измерительных задач математический аппарат без учета условий его применимости, искажающих смысл терминов математической статистики и нарушающих нормы доверительной вероятности, установленные государственными поверочными схемами.

Так, в примерах иллюстрирующих [3], нарушены все условия применимости дисперсионного анализа. В рекомендациях [4, 5] и правилах [6] игнорируется замечание GUM [7] о несоответствии понятий «интервал охвата» и «уровень доверия» принципам доверительного оценивания математической статистики. Введение стандартами [8, 9] «неопределенности измерения» в поверку привело к использованию отмененных стандартов из-за риска допустить в эксплуатацию дефектные средства измерений. А в рекомендациях [10], переводе одноименного Руководства G 1-104 Объединенного комитета по подготовке руководств в метрологии, всего два пункта из заключительных разделов исключают применение [7] в Государственной системе обеспечения единства измерений (ГСИ).

К тому же основное Руководство [7] и Дополнение № 1 к нему [11] настолько объемны, что их не дочитывают до конца, не говоря уже о грамотном применении или просто применении.

Корни этого парадокса лежат не в «новизне» отдельных положений этих руководств, а в том, что их разрабатывают и переводят на русский язык спе-

циалисты, не имеющие работ в области теории вероятностей и математической статистики, порой анонимно и без должного обсуждения [12].

Как же воспользоваться тем позитивным, что заложено в «концепции неопределенности», но не доведено до уровня, позволяющего «безопасно» воспользоваться этим в метрологической практике?

С этой целью в статье рассмотрен ряд математических результатов, на которые опираются статистические методы теории измерительных задач, позволившие решить ряд метрологических проблем.

### Истоки теории измерительных задач

За последнюю половину XX-го века число «видов измерений» резко возросло. От прямых, косвенных, совокупных и совместных измерений до статистических, векторных и даже мягких, о чем замечательный русский метролог В.А. Кузнецов сказал: «Мы перестали понимать, что такое измерение».

Известно, что все измерения «прямые», а большую долю этих «видов измерений» составляют вычисления. Поэтому «при установлении классификации видов измерений в качестве классификационного признака принята физическая величина», причем необходимо «не допускать возможности включения одной и той же измеряемой физической величины в различные виды измерений» [13].

Компьютеризация метрологии привела к необходимости учета в результатах решения измерительных задач не только погрешностей измерений, но и погрешностей неадекватности математических моделей, о чем еще в 1980-е годы говорил другой замечательный русский метролог – П.В. Новицкий.

Другими словами, выделение из традиционной «теории измерений» специальной теории математических задач, решаемых путем измерений, или измерительных задач, назрело, но для этого не хватало ряда ключевых математических результатов.

В 70-е годы XX-го века по инициативе Ю.И. Алимова [14] и В.Н. Тугубалина [15] была

начата всесоюзная дискуссия о границах применимости математической статистики. Ее продолжили В.В. Налимов, П.Е. Эльясберг, А.Ф. Фомин, Ф.П. Тарасенко и другие [16–30]. За рубежом Ф. Мостеллер, Дж. Тьюки, П. Хьюбер, И. Вучков и Ф. Хампель [31 – 34] обратили внимание на ряд нарушений предпосылок применимости теории вероятностей и регрессионного анализа, для которых, как заметил Ю.П. Адлер, развитие вычислительной техники стало путем «вверх по лестнице, ведущей вниз».

К началу 1990-х годов дискуссия сфокусировалась на проблеме статистической идентификации погрешностей неадекватности математических моделей сложных объектов, систем их управления и обеспечения эксплуатации [35 – 38]. Причиной этого стал катастрофический феномен 1985–1986 годов в авиационной, ракетно-космической и ядерно-энергетической технике [29]. Тогда среди причин катастроф впервые начали фигурировать погрешности измерений, математические модели, расчеты вероятностей и программные средства [38].

Поэтому первым практическим приложением теории измерительных задач были компьютерные системы прогнозирующего метрологического сопровождения типа «ММК–СТАТ», позволившие решать задачи структурно-параметрической идентификации статических математических моделей объектов [29, 39 – 43]. А в конце 1990-х годов по заданию Госстандарта России в связи с необходимостью метрологической аттестации программного обеспечения стали разрабатываться нормативные документы по теории измерительных задач [44, 1]. Появились системы метрологического сопровождения следующего поколения – для решения задач многомерного регрессионного анализа «ММК–СТАТ М» [45, 1] и идентификации динамических моделей объектов в виде дифференциальных уравнений «ММК–ДИН» [43].

Отсутствие четкой привязки метрологической терминологии к аксиоматике теории действительных чисел, дублирование термином «измерительная задача» термина «измерение» [13] стало одной из причин бесплодности дискуссий о «Руководстве по выражению неопределенности измерения» (GUM) [7]. Но более существенную роль сыграло игнорирование указаний GUM на несовпадение определенных терминов «доверительная вероятность» и «уровень доверия» с определениями одноименных статистических терминов. При этом GUM не отрицало применения коэффициентов, отличных от «коэффициента охвата», к числу которых относятся коэффициенты доверительных границ оценок параметров на основе распределений Стьюдента и  $\chi^2$ .

Проблема доверительной вероятности не нова.

Так, согласно [46] «в качестве плотности рас-

пределения вероятностей погрешности принимают закон, близкий к нормальному усеченному, если имеются основания предполагать, что реальная плотность распределения – функция симметричная, одномодальная, отличная от нуля на конечном интервале значений аргумента, и другая информация о плотности распределения отсутствует. Если имеется информация о том, что хотя бы одно из указанных условий не выполнено, принимают другую аппроксимацию плотности распределения вероятностей, более соответствующую решаемой измерительной задаче. В качестве плотности распределения вероятностей составляющих погрешности измерений, для которых известны только пределы допускаемых значений, т.е. границы интервала, в пределах которых находится соответствующая составляющая погрешности измерений с вероятностью 1, при расчетах характеристик погрешности измерений принимают закон равномерной плотности, если отсутствует информация об ином виде распределения».

Важным результатом в теории измерительных задач стала разработка математического и программного обеспечения метода многократных измерений [2, 47, 48], проблемы практического применения которого регулярно обсуждались на Московском метрологическом межкафедральном семинаре. Его участниками являются специалисты ВНИИМС, МГТУ имени Н.Э. Баумана, МАИ имени С. Орджоникидзе, ВВИА имени Н.Е. Жуковского, МИЭМ, СТАНКИН и кафедр метрологии других вузов Москвы. Внесли свой вклад в решение проблемы и специалисты ВНИИФТРИ, отметив [49], что «формулы, рекомендуемые в МИ 1552–86 и МИ 2083–90 для вычисления доверительной границы погрешности результата измерения, являются неверными».

Прообразом теории измерительных задач стала монография Ю.В. Линника [50]. Однако в ней еще не было разделения погрешностей средств измерений и погрешностей математических моделей объектов измерений из-за отсутствия определения погрешности неадекватности математической модели как метрологического термина, а измерительная задача ее идентификации сформулирована не была.

Теория измерительных задач в рамках фундаментальной метрологии [1, 21, 29, 22, 51 – 54] рассматривает математические модели физических объектов как зависимости между величинами, характеризующими их свойства. При этом каждую из величин представляют композицией наблюдаемой  $\Xi$  и ненаблюдаемой  $\Psi$  составляющих соответственно как стохастических по А.Н. Колмогорову [55] случайной и неопределенных величины. Составляющая  $\Xi$  может быть описана апостериорно статистической функцией распределения (СФР) данных измерений или эквивалентной функцией распределения вероятностей (ФРВ). Составляющая  $\Psi$  – априорно функ-

цией распределения вероятностей данных о погрешностях средств измерений и погрешностях неадекватности ее математических оценок.

Измерительные задачи формулируют в терминах характеристик математических моделей объектов и решают путем вычислений по данным измерений и по результатам решения других задач. В зависимости от целей, наличия и достоверности априорной информации о переменных, параметрах, структуре и погрешностях неадекватности моделей объектов измерений, измерительные задачи идентификации моделей объектов измерений разделяют на задачи размерностной, параметрической, структурно-параметрической и полной идентификации.

В задачах размерностной идентификации искомыми являются переменные модели – физические и расчетные величины. Эти задачи разделяют по родам физических величин и решают методом прямого измерения, методом косвенного измерения и методом совокупных измерений [34].

В задачах параметрической идентификации искомыми являются параметры модели объекта измерений с известной структурой. При структурно-параметрической идентификации искомыми являются структура и параметры модели объекта измерений в классе модели максимальной сложности. В задачах полной идентификации достоверная априорная информация о переменных, структуре и параметрах модели отсутствует. Задачи этих типов решают методом совместных измерений.

В ситуациях, когда показания средств измерений от измерения к измерению изменяются случайным образом, перечисленные методы решения измерительных задач сочетают с методом многократных измерений со структурно-параметрической или параметрической идентификацией ФРВ или плотностей распределений вероятностей (ПРВ) величин по СФР данных их измерений [2].

**Базис теории измерительных задач**

Статистические методы теории измерительных задач учитывают тот факт, что существует несколько концепций вероятности:

- аксиоматическая концепция Муавра–Лапласа;
- частотная концепция Пуассона–Мизеса;
- субъективная концепция Бернулли–Бейеса;
- интерполяционная концепция Гаусса–Фишера.

Аксиоматическая концепция вероятности основана на принципе равной вероятности для элементов множества, частотная – на пределе относительной частоты их проявления в неограниченно удлиняющейся серии испытаний, а субъективная – на экспертных оценках.

Базисом статистических методов теории измерительных задач стала интерполяционная концепция Гаусса-Фишера, основанная на принципе апо-

стериорного максимального правдоподобия, который реализуется путем интерполяции распределения выборки значений величины распределением вероятностей по критериям максимума вероятности согласия и минимума погрешности неадекватности.

Вероятность согласия и погрешность неадекватности для статистических измерительных задач являются базовыми понятиями [51].

**Аксиома о вероятности согласия** (рис. 1). Для величин  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  вероятность согласия есть площадь пересечения их ПРВ  $f_{\Psi_1}(\psi)$  и  $f_{\Psi_2}(\psi)$ :

$$\alpha_{\Psi_1\Psi_2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \inf_f \{f_{\Psi_1}(\psi), f_{\Psi_2}(\psi)\} d\psi. \quad (1)$$

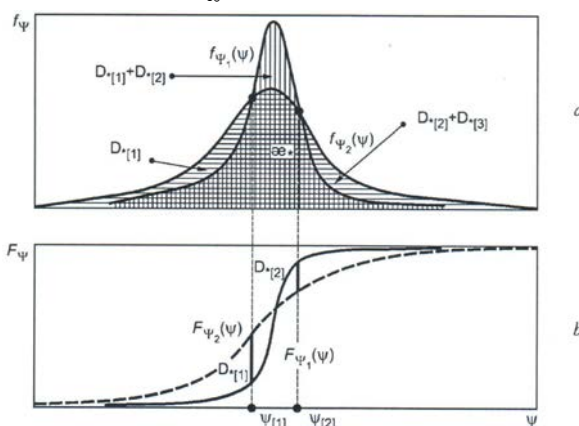


Рис. 1. Геометрический смысл вероятности согласия

**Лемма о расстоянии Колмогорова.** Если ПРВ величин  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  таковы, что  $f_{\Psi_1}(\psi_0) = f_{\Psi_2}(\psi_0)$  в единственной точке  $\psi_0$ , то вероятность согласия

$$\alpha_{\Psi_1\Psi_2} \equiv 1 - \sup_{\psi} |F_{\Psi_1}(\psi) - F_{\Psi_2}(\psi)| \equiv 1 - D_{\Psi_1\Psi_2}, \quad (2)$$

где  $D_{\Psi_1\Psi_2}$  – расстояние Колмогорова.

**Теорема о вероятности согласия** [1]. Для величин  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  вероятность согласия

$$\hat{\alpha}_{\Psi_1\Psi_2} \equiv 1 - \sum_{r=1}^R D_r, \quad (3)$$

где  $D_r$  – r-й максимум функции (рис. 1, б)

$$D(\psi) \equiv |F_{\Psi_1}(\psi) - F_{\Psi_2}(\psi)|.$$

**Теорема о  $\alpha$ -критерии** [2, 54]. Для величины  $\Psi$  с ФРВ  $F_*(\xi)$  и случайной величины  $\Xi$  с СФР  $F_N(\xi)$  оценка вероятности согласия

$$\hat{\alpha}_{\Psi} \equiv 1 - \sum_{r=1}^R |D_{*r}^+ - D_{*r}^-|, \quad (4)$$

где  $\xi_{[r]}, r = 1, R$ , – абсцисса r-ого максимума

$$D(\xi_{[r]}) = |F_*(\xi_{[r]}) - F_N(\xi_{[r]})|,$$

$$F_N^+(\xi_{[r]}) = \max F_N(\xi_{[r]}),$$

$$F_N^-(\xi_{[r]}) = \min F_N(\xi_{[r]}) \text{ и } D^{\pm}(\xi_{[r]}) =$$

$$= |F_*(\xi_{[r]}) - F_N^{\pm}(\xi_{[r]})|.$$

Статистика  $\mathfrak{a}$ -критерия (4) обращается в нуль только в том случае, если ФРВ проходит точно через середины «ступенек» СФР. Параметрическую идентификацию на основе  $\mathfrak{a}$ -критерия реализует метод максимума согласия (ММС), вычислительная схема которого аналогична вычислительной схеме метода максимального правдоподобия (ММП). В упрощенном виде она сводится к методу минимума расстояния Колмогорова [2].

В общем же случае вероятность согласия численно равна сумме относительных частот СФР, пересеканной в точках ее роста гипотетической ФРВ.

**Теорема о свертке** [2]. ПРВ суммы независимых неопределенных величин  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$

$$f_X(x) = \frac{F_{\Psi_2}(x - \psi_H) - F_{\Psi_2}(x - \psi_B)}{\psi_B - \psi_H}, \quad (5)$$

если  $f_{\Psi_1}(\psi) \Big|_{\psi \in [\psi_H, \psi_B]} = (\psi_B - \psi_H)^{-1}$ .

**Следствие.** Если  $\psi_H = -\theta_0$  и  $\psi_B = \theta_0$ , то ПРВ (5) является центральным распределением Леви

$$f_X(x) = \frac{F_{\Psi_2}(x + \theta_0) - F_{\Psi_2}(x - \theta_0)}{2\theta_0}. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) позволяют представлять в аналитическом виде результаты решения измерительных задач с учетом условий наблюдаемости составляющих искомым величин как неопределенных величин при ФРВ в явном виде.

**Теорема о медиане** [51, 1]. Если ФРВ  $F_{\Psi}(\psi)$  величины  $\Psi$  такова, что  $\lim_{\psi \rightarrow -\infty} \psi \cdot F_{\Psi}(\psi) = 0$ , то

$$M|\Psi - \theta| \equiv M(\Psi - \theta) + 2 \int_{-\infty}^{\theta} F_{\Psi}(\psi) d\psi. \quad (7)$$

**Следствие.** Тождество (7) минимизирует медиану. Минимуму соответствует среднее абсолютное отклонение (САО).

**Теорема о модульном критерии** [2]. САО СФР от ФРВ в точках роста

$$d_* = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left| F_*(\hat{\xi}_{[r]}) - [F_N^-(\hat{\xi}_{[r]}) + F_N^+(\hat{\xi}_{[r]})] / 2 \right|. \quad (8)$$

Оценки (4), (7) и (8) связаны с функцией

$$D(\xi) = \left| F_*(\xi) - F_N(\xi) \right|.$$

При неравенстве числа параметров конкурирующих гипотез используют схему перекрестного наблюдения погрешности неадекватности [1].

**Теорема о перекрестной вероятности согласия** [2]. Для ФРВ и СФР в схеме перекрестного наблюдения оценка вероятности согласия

$$\mathfrak{a}_{\Psi}^{\times} \equiv 1 - \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^R \left| D_{\Psi_{[r]}}^+(\Pi \hat{\Theta}_m) - D_{\Psi_{[r]}}^-(\Pi \hat{\Theta}_m) \right| \times \times \Pi(r, {}^K R_m) \leq \hat{\mathfrak{a}}_{\Psi}, \quad (9)$$

где  $\Pi \hat{\Theta}_m$  – оценки параметров ФРВ по  $m$ -ой пробной части,  ${}^K R_m$  – ранги контрольного окна с индикаторной функцией

$$\Pi(r, {}^K R_m) = \{0 : r \notin {}^K R_m; 1 : r \in {}^K R_m\}.$$

Перекрестная оценка вероятности согласия (9) учитывает погрешности неадекватности структуры ФРВ как характеристика положения СФР [1].

**Теорема о перекрестном модульном критерии.** Средний модуль погрешности неадекватности для функции распределения вероятностей

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2R} \times \times \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^R \left| D_{\Psi_{[r]}}^+(\Pi \hat{\Theta}_m) + D_{\Psi_{[r]}}^-(\Pi \hat{\Theta}_m) \right| \cdot \Pi(r, {}^K R_m). \quad (10)$$

Таким образом, понятие эквивалентности (вероятности согласия) связывает параметрическую (4) и перекрестную (9) оценки вероятности согласия, расстояние Колмогорова  $D_*$ , среднее абсолютное отклонение  $d_*$  случайной составляющей погрешности неадекватности ФРВ (8) и средний модуль погрешности неадекватности ФРВ (10). Эти критерии использованы в алгоритмах идентификации метода максимума компактности (ММК): ММКММС [2], ММКМНК, ММКМНМ и ММКМЕДС [1].

Погрешности неадекватности ФРВ с  $M$  параметрами определяют в схеме перекрестного наблюдения погрешностей неадекватности (перекрестного экзамена, «складного ножа», cross validation scheme) по СФР, интервал определения которой делится на  $(M+1)$  частей, каждая из которых последовательно используется в качестве контрольной для определения погрешностей экстраполяции модели ФРВ, построенной по остальной части данных [1].

Результат размерностной идентификации представляют сверткой ФРВ наблюдаемых и ненаблюдаемых составляющих. Первую из них формируют с параметрами положения  $\theta_1$  и рассеяния  $\theta_2$ , соответствующими СФР показаний средства измерений или данных их вычислительных преобразований. Ненаблюдаемая составляющая характеризует неисключенные систематические погрешности измерений и оценивания параметров ФРВ случайной составляющей. Для нее при отсутствии достоверной априорной информации в качестве наилучшего случая принимают равномерное распределение с параметром рассеяния  $\theta_0$  [46], а результат идентификации представляют толерантными  $(P, \gamma)$ -границами  $\Delta_{P\gamma}$ .

Приведенные результаты позволили объяснить парадокс Эльясберга-Хампеля – неминуемое откло-

нение гипотезы о любой непрерывной ФРВ при неограниченном росте объема выборки [24, 34], а переходом от ПРВ к ФРВ удалось разработать метод параметрической идентификации, более эффективный, чем метод максимального правдоподобия [2].

Так, в [54] приведен пример анализа данных круговых сличений, для которых вероятность согласия оценок ММП и ММС для неизвестного распределения при выборке  $N = 10$  составила соответственно 0,37 и 0,60, а для выборки объема  $N = 100$  [56, с. 30], сформированной распределением Гаусса – 0,06 и 0,42 [57]. Последнее обстоятельство является иллюстрацией парадокса Эльясберга-Хампеля.

### Измерительная задача идентификации диаграммы Хаббла

Проблемы, вызванные нарушениями условий применимости статистических методов, иллюстрируют измерительные задачи композиционной идентификации диаграммы Хаббла и параметрической идентификации  $\Lambda$ CDM-модели [21, 58 – 60]. В этих задачах теория измерительных задач предусматривает проверку статистической однородности данных относительно математических моделей сложнейшего объекта измерений – Вселенной.

Показательна история этой проблемы.

В 1929 году Е. Hubble установил, что в спектрах галактик красное смещение

$$z = (H_0/c) \cdot r, \quad (11)$$

где  $H_0 \sim 530 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  – постоянная Хаббла,  $c$  – скорость света,  $r$  – расстояние, а зависимость

$$\lg cz = \theta_0 + \theta_1 \cdot m_* \rightarrow \theta_0 + \theta_1 \cdot x. \quad (12)$$

при модуле расстояния  $m_* - M_* = 5 \lg D_L - 5$ , где  $m_*$  и  $M_*$  – соответственно исправленные наблюдаемая и абсолютная звездные величины галактик ( $*$ =G), стала основой шкалы космологических расстояний. Распределение внегалактических объектов в координатах зависимости (12) назвали диаграммой Хаббла. Ее морфологический состав в 1950-1960-е годы дополнили радиогалактики ( $*$ =R) и квазары ( $*$ =Q). Если для радиогалактик зависимость (12) отличалась значением нуль-пункта  $\theta_0$  и совпадала с аналогичной зависимостью для ярчайших галактик скоплений [61], то квазары рассматривались как объекты с аномально большим красным смещением.

В 1958 году W. Mattig получил решение в модели Фрийдмана для фотометрического расстояния:

$$D_L = (c/H_0 q_0^2) \cdot \{q_0 z + (q_0 - 1) \cdot [\sqrt{2q_0 z + 1} - 1]\}, \quad (13)$$

где  $q_0$  – параметр ускорения. При  $q_0 = 1$  и  $D_L = r$  выражение (3) совпадало с законом Хаббла.

В 1961 году F. Noyle предположил, что закон Хаббла (1) может содержать нелинейный член:

$$z = (H_0/c) \cdot r + Kr^2 \rightarrow \theta_1 \cdot x + \theta_2 \cdot x^2. \quad (14)$$

В 1966 году, когда A. Sandage установил, что на расстоянии миллиарда световых лет галактики

движутся на  $10\,000 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$  быстрее, чем предсказывает закон Хаббла (11), было замечено [21, с. 22], что  $K \approx (H_0/c)^2$ , а модель (14) – разложение в ряд

$$z = (H_0/c) \cdot r \cdot [1 - (H_0/c) \cdot r]^{-1} \rightarrow \theta_1 \cdot x + \theta_2 \cdot x^2. \quad (15)$$

Привлекательность соотношения (15) была в том, что лучшая для тех лет оценка постоянной Хаббла снижала космологический возраст Вселенной до геологического возраста Земли.

В 1967 году Н. Агр выдвинул гипотезу о локальной природе красного смещения квазаров. Его поддержали опытные исследователи квазаров G. и M. Burbidge. Они считают, что диаграмма Хаббла представляет функцию светимости квазаров. Тогда же D. Wilkinson и R. Partridge обратили внимание на то, что «неоднородность в распределении квазаров с большими красными смещениями пространственно совпадает с минимумом в распределении теплового реликтового излучения». А в 1969 году Н. Кардашев заявил: «Если совпадение реально, то это может явиться сильным аргументом в пользу космологической природы красного смещения, а также в пользу анизотропии модели вселенной» [66].

В 1968 году A. Sandage отметил, что  $q_0 \neq 1$  может сказаться на линейности диаграммы Хаббла при  $z > 0,46$ . Однако можно показать, что строгое решение уравнения (13) относительно красного смещения

$$z = q_0 \left\{ (H_0/c) \cdot D_L - \frac{q_0 - 1}{q_0} \cdot [\sqrt{1 + 2(H_0/c) \cdot D_L} - 1] \right\}$$

дает закон Хаббла по формуле Тейлора и при  $q_0 \neq 1$ .

Вместе с тем модуль расстояния при нуль-пункте  $S_{0*} = (H_0/c) \cdot 10^{-0,2 \cdot M_* + 1}$  и замена переменных  $x(m) = 10^{0,2m}$  в строгом решении уравнения Маттига

$$z = q_0 S_{0*} \cdot x - (q_0 - 1) \cdot (\sqrt{1 + 2S_{0*} \cdot x} - 1), \quad (16)$$

позволяет использовать его в качестве нелинейной характеристики положения диаграммы Хаббла.

К 1970 году оценки постоянной Хаббла снизились почти на порядок, а к концу XX-го века по данным проекта Hubble Space Telescope Key Project (HST KP) составили (62,3...143,4)  $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ .

В 1980 году для модели (15) был указан более широкий класс моделей со вторым параметром [22]:

$$z = [1 + (H_0 r)/(ac)]^a - 1 \rightarrow \theta_1 \cdot x + \theta_2 \cdot x^{1+a}. \quad (17)$$

В 1985 году G. Vaucouleurs и W.L. Peters обнаружили в области Virgo аномалию постоянной Хаббла  $H_0 \approx 50 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  при вдвое большем среднем значении для выборки  $N = 500$  галактик.

В 1998 году И. Караченцев и Д. Макаров идентифицировали эллипсоид дипольной анизотропии постоянной Хаббла по выборке  $N = 303$  галактики с максимумом в Virgo. В том же 1998 году по данным о 119 радиогалактиках и 124 квазарам была обнаружена дипольная анизотропия их красного смещения с минимумом для квазаров в области Virgo–Leo [62].

Обнаружение на рубеже XX–XXI веков нелинейности и анизотропии диаграммы Хаббла [63, 64]

вошло в противоречие с изотропными космологическими моделями и вызвало необходимость более детального их статистического анализа, и в первую очередь стандартной  $\Lambda$ CDM-модели [59].

$\Lambda$ CDM-модель характеризуют 6 параметрами: плотностью барионов  $\Omega_b h^2$  («обычного» вещества), плотностью «холодного темного вещества»  $\Omega_c h^2$ , плотностью «темной энергии»  $\Omega_\Lambda$ , спектральным индексом  $n_s$ , оптической толщиной  $\tau$  и амплитудой  $\sigma_8$  флуктуаций плотности галактик в радиусе 8 Мпс. Параметры  $\Lambda$ CDM-модели оценивают по спектру реликтового излучения, измеряемому космическим зондом WMAP, путем статистической обработки данных на основе гипотезы гауссовости. А постоянную Хаббла выражают в единицах  $100 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  и обозначают символом  $h$ .

Появление в космологии «темного вещества» и «темной энергии» вызвано необходимостью согласования космологических моделей с астрофизическими данными, и за ними конкретный физический механизм пока еще не закреплен.

Результаты обработки данных уже 1-го года (WMAP-1) показали, что геометрия наблюдаемой Вселенной почти евклидова. Однако анализ результатов последующих лет эксперимента выявил ряд проблемных обстоятельств (табл. 1).

Таблица 1

Оценки параметров  $\Lambda$ CDM-модели (68% CL) по годам эксперимента WMAP

|                  | 3-й год               | 5-й год               | 7-й год               |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\Omega_b h^2$   | $0,02229 \pm 0,00073$ | $0,02273 \pm 0,00062$ | $0,02258 \pm 0,00057$ |
| $\Omega_c h^2$   | $0,1054 \pm 0,0078$   | $0,1099 \pm 0,0062$   | $0,1109 \pm 0,0056$   |
| $\Omega_\Lambda$ | $0,759 \pm 0,034$     | $0,742 \pm 0,030$     | $0,734 \pm 0,029$     |
| $n_s$            | $0,958 \pm 0,016$     | $0,963 \pm 0,015$     | $0,967 \pm 0,015$     |
| $\tau$           | $0,089 \pm 0,030$     | $0,087 \pm 0,017$     | $0,088 \pm 0,015$     |
| $\sigma_8$       | $0,761 \pm 0,049$     | $0,796 \pm 0,036$     | $0,801 \pm 0,030$     |
| $h$              | $0,732 \pm 0,032$     | $0,719 \pm 0,027$     | $0,710 \pm 0,025$     |

1. Специалисты WMAP Science Team пришли к выводу, что TT-данные (об анизотропии) и TE-данные (о корреляции между анизотропией и E-модой поляризации) с 95%-м уровнем доверия совместно могут быть описаны в рамках  $\Lambda$ CDM-модели распределением Гаусса. Они предположили, что избыток статистики критерия  $\chi^2$  для  $\nu = 1342$  степеней свободы минус число параметров модели –  $\chi^2_{\text{eff}}/\nu > 1,066$  при вероятности согласия данных с моделями ~5%, вызван гравитационным линзированием, угловыми вариациями диаграммы направленности WMAP и небольшим негауссовым шумом. Но отдельно для TT-данных  $\chi^2_{\text{eff}}/\nu > 1,090$  при  $\nu = 893$  вероятность согласия оказалась еще меньше: ~3%

[3]. Поэтому негауссовость данных WMAP была установлена достаточно быстро и независимо группами специалистов под руководством О. Верходанова, W. Colley, P. Vielva и H. Eriksen [64].

2. По данным WMAP 1-года была обнаружена т.н. «дегенерация»  $\Lambda$ CDM-модели из-за корреляции спектрального индекса  $n_s$  с плотностью барионов  $\Omega_b h^2$  и оптической толщиной  $\tau$ . Это явление в математической статистике называют стохастической мультиколлинеарностью. Мерами борьбы с ней являются упрощение модели путем исключения параметров и увеличение объема выборки.

Но при  $\tau = 0$  и  $n_s = 1$   $\Lambda$ CDM-модель отклоняется с  $\Delta\chi^2_{\text{eff}} > 6$ . А из-за расхождения оценок  $h$  с оценками HST KP также были отклонены модель с плотностью  $\Omega_m = 0,47$  при  $h = 0,57$  и модель с неплоским пространством с плотностями  $\Omega_\Lambda = 0$  и  $\Omega_\Sigma = 1,28$  при  $h = 0,325$  [65]. Увеличение же объема данных наблюдений ослабило корреляцию  $n_s$ - $\tau$ , но проявило положительную корреляцию  $\sigma_8$ - $\Omega_c h^2$  и  $n_s$ - $\Omega_b h^2$ , а также отрицательную корреляцию  $\Omega_\Lambda$ - $\Omega_c h^2$  и  $\Omega_\Lambda$ - $\sigma_8$ . Есть и более простое объяснение – корреляция амплитуды  $\sigma_8$  флуктуаций плотности галактик с другими параметрами может быть связана с затенением изотропного реликтового излучения и с более существенным вкладом этого эффекта в «мультипольную анизотропию», чем это предполагалось до сих пор.

3. Специалисты ГАИШ указали на казус «открытия» по данным WMAP 1-го года. При объединении оценки  $n_s = 0,99 \pm 0,04$  с данными других экспериментов и данными по  $L_\alpha$ -лесу, эффектом Ганна-Питерсона, оценка  $n_{s\Sigma} = 0,96 \pm 0,02$  (68% CL) сместилась со значения  $n_s = 1$  в инфляционной теории.

Дело в том, что данные по  $L_\alpha$ -лесу крайне неточны, и комбинирование их с довольно точными данными экспериментов по реликтовому излучению, в первую очередь, самого WMAP, не ведет ни к чему хорошему. Этим и было вызвано «открытие».

Но последующие оценки подтвердили его с более высоким уровнем доверия.

Сужение « $1\sigma$ -х границ», взвешенных по дисперсиям оценок, не должно вводить в заблуждение. Эти интервалы характеризуют не рассеяние совокупности данных, которую следует описывать смесью распределений (именно это и не делается), а СКО оценки параметра положения смеси.

Заметим, « $1\sigma$ -е границы», как и границы интервала охвата, не являются ни доверительными, ни толерантными, а объединение неравноточных данных не дает повышения точности по сравнению с наиболее точным компонентом смеси. И «открытие» за счет объединения неравноточных данных надо «закрывать» уже только по этой причине.

В теории измерительных задач «дегенерация» моделей является признаком избыточности числа параметров, несоответствия сложности

структуры модели достигнутому уровню точности измерений и, в конечном итоге, указанием на существование модели с меньшим числом параметров и меньшими погрешностями неадекватности. Поэтому рост точности измерений WMAP по сравнению с ранее запущенным зондом COBE в 1000, чувствительности – в 45, а углового разрешения – в 33 раза, для космологических моделей оказался недостаточным. Теперь решение проблемы «дегенерации»  $\Lambda$ CDM-модели возлагают на еще более высокую точность измерений космического зонда Planck.

4. В 2007 году D. Schwarz и B. Weinhorst подтвердили значимую по критерию  $\chi^2$  асимметрию диаграммы Хаббла по сверхновым SN Ia при  $z < 0,2$  с максимумом, близким к ориентации экваториальной системы, что указало на необходимость полного исследования систематических эффектов и калибровки SN между экваториальными полушариями и на то, что анизотропия диаграммы Хаббла на масштабах  $(10...20)^\circ$  вызвана ячеистостью крупномасштабной структуры Вселенной. Они считают, что «большая часть свидетельств о существующем на сегодняшний день ускорении расширения Вселенной получена по косвенным аргументам и основывается на ряде непроверенных предположений, а независимый от модели тест не в состоянии обнаружить ускорение Вселенной в области высокой статистической значимости. Поэтому пока рано считать ускоренное расширение Вселенной само собой разумеющимся свидетельством, оно в значительной степени полагается на априорные предположения о  $\Lambda$ CDM-модели» [7].

5. К 7-му году эксперимента накоплен значительный объем данных измерений, но ожидаемого прогресса в точности оценок по параметрам, вызвавшим «дегенерацию»  $\Lambda$ CDM-модели, нет.

Решение задачи идентификации диаграммы Хаббла предусматривает установление ее нелинейности и анизотропии с учетом ряда особенностей.

Первая их часть является физической:

1) диполи анизотропии постоянной Хаббла и реликтового излучения совпадают с направлением «Южный галактический полюс + система воидов в Aquarius и Eridanus → Северный галактический полюс + крупномасштабная система сверхскоплений галактик (Great Attractor, Shapley, Centaurus, Leo, Coma, Virgo)»;

2) диполи анизотропии постоянной Хаббла и реликтового излучения ориентированы практически по центрам окон прозрачности Млечного пути;

3) доплеровская интерпретация дипольной анизотропии предполагает, что движение Галактики относительно реликтового фона сопровождается ее собственным вращением вокруг оси по аналогии с закручиванием воды при входе в водосток.

Вторую часть составляют особенности статистической обработки данных.

1. Анизотропию диаграммы Хаббла не следует оценивать в Местном сверхскоплении, где распределение пекулярных скоростей галактик неоднородно. Так, M. McClure и C. Dyer использовали из базы данных SIMBAD в качестве основных данные о 36 SN и 40 скоплениях галактик, а в качестве данных сравнения – 57 скоплений галактик. Но даже при  $h = 1,0$  эти данные соответствуют красному смещению  $z < 0,1$ . Не на много лучше и данные, на основе которых D. Schwarz и B. Weinhorst критикуют эти выводы:  $z < 0,2$ . И даже данные 2009 года группы, которой руководит A.G. Riess, по выборке объемом 240 SN типа Ia лежат в пределах  $z \leq 0,1$  и не дают необходимого покрытия небесной сферы для выявления анизотропии диаграммы Хаббла.

2. В 2007 году группа J. Luminet показала, что спектр реликтового фона с аномально малыми 2-й и 3-й гармониками точнее моделируется в додекаэдрическом пространстве Пуанкаре. И в 2008 году B. Roukema с сотрудниками вычислили на карте WMAP-3 6 пар пунктов с сильной взаимной корреляцией в центрах с галактическими координатами  $\{(l, b)\}_{i=1,6} \approx \{(184^\circ, 62^\circ), (305^\circ, 44^\circ), (46^\circ, 49^\circ), (117^\circ, 20^\circ), (176^\circ, -4^\circ), (240^\circ, 13^\circ)\}$  в пределах  $\approx 2^\circ$ .

3. В 2009 году Sollerman J. и др. установили, что выводы о структуре космологических моделей зависят от метода статистической обработки данных о SN и гипотез о виде распределения погрешности модели, где в последние годы при оценивании параметра положения место среднего арифметического чаще занимает выборочная медиана.

4. Группирование данных при использовании критерия  $\chi^2$  позволяет подгонять плотность распределения Гаусса к гистограмме относительных частот с достаточно высокой «точностью».

Однако вероятность согласия непрерывной функции распределения вероятностей и дискретной статистической функции распределения данных как сумма относительных частот повторения ранговых значений на участках их пересечения с увеличением объема выборки без группирования быстро уменьшается. Поэтому в конечном итоге при длительном процессе формирования статистического ряда данных и достижении пусть даже очень большого объема выборки любая непрерывная гипотеза о виде распределения вероятностей с чрезвычайно ограниченным числом параметров будет отклонена уже только в силу невозможности длительного сохранения условий статистической однородности.

На эту особенность приложений математической статистики еще в начале 1980-х годов и обратили внимание П.Е. Эльясберг [24] и F. Hampel [34].

5. Многие эмпирические формулы космологии, соотношения E. Оrik, S. Faber и R. Jackson, R. Tully и J. Fisher для определения расстояний до галактик, линейны и по своей структуре примитивны по сравнению с описываемым объектом, Вселенной.

Задача композиционной идентификации диаграммы Хаббла была сформулирована и решена для радиогалактик и квазаров в 2009 году [58 – 60].

Это позволило уточнить результаты 1998 года. Уже тогда было установлено, что для идентификации крупномасштабной анизотропии диаграммы Хаббла пригодны данные о положении, визуальных величинах, красных смещениях и угловых размерах 383 радиогалактик и квазаров [61, табл. 31].

Однако это решение было получено в экваториальных, а не в галактических координатах. Такое решение было получено в 2010 году на основе строгого решения уравнения Маттига при делении данных [61] на сектора, смещенные к галактическому экватору [67, 68].

Дипольный тест [64] дает в экваториальных координатах для квазаров максимум красного смещения при  $\alpha \approx 2,6$  ч (Eridanus, Cetus) и минимум при  $\alpha \approx 14,6$  ч (Virgo, Centaurus), для радиогалактик – максимум при  $\alpha \approx 22,1$  ч (Aquaigius) и минимум при  $\alpha \approx 10,1$  ч (Leo).

В соответствии с этим данные [61] были разделены на 6 секторов (табл. 2).

Таблица 2

Кластеризация данных в экваториальных координатах

| № сектора | склонение $\alpha$ , час | прямое восхождение, $\delta$ , град | объем выборки $N$ |     |
|-----------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------|-----|
|           |                          |                                     | R                 | Q   |
| 0         | 00...24                  | -90...+90                           | 172               | 201 |
| 1         | 10...16                  | -60...+30                           | 40                | 50  |
| 2         | 22...04                  | -30...+60                           | 51                | 50  |
| 3         | 04...10                  | -60...+30                           | 22                | 26  |
| 4         | 16...22                  | -30...+60                           | 21                | 49  |
| 5         | 00...24                  | > +30 (60)                          | 20                | 19  |
| 6         | 00...24                  | < -30 (60)                          | 17                | 5   |

Калибровка нуль–пункта моделей (6) для оценки  $H_0 = 74,2 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  дает  $M_Q = -26,03$  для квазаров и  $M_R = -21,24$  для радиогалактик. Это согласуется с совпадением диаграмм Хаббла для радиогалактик и ярчайших галактик скоплений, причем ярчайшая галактика в Virgo имеет  $M_G = -21,68$  [61].

В табл. 3 – 5 приведены результаты параметрической идентификации методами наименьших квадратов (МНК) и наименьших модулей (МНМ) с указанием CAO  $d$  изотропных моделей характеристик положения диаграммы Хаббла для радиогалактик ( $N = 172$ ) и квазаров ( $N = 201$ ).

Таблица 3

Изотропные типовые модели для радиогалактик

| Модель | Метод | $\theta_0$             | $\theta_1$             | $\theta_2$              | $d$    |
|--------|-------|------------------------|------------------------|-------------------------|--------|
| (2)    | МНК   | $7,4672 \cdot 10^{-3}$ | $4,1212 \cdot 10^{-5}$ | –                       | 0,0231 |
| (4)    | МНК   | –                      | $4,6976 \cdot 10^{-5}$ | $-6,904 \cdot 10^{-10}$ | 0,0231 |
| (2)    | МНК   | $-4,276 \cdot 10^{-4}$ | $4,7309 \cdot 10^{-5}$ | –                       | 0,0231 |

Таблица 4

Изотропные типовые модели для квазаров

| Модель | Метод | $\theta_0$ | $\theta_1$             | $\theta_2$             | $d$           |
|--------|-------|------------|------------------------|------------------------|---------------|
| (2)    | МНК   | 0,5913     | $1,2565 \cdot 10^{-4}$ | –                      | 0,5248        |
| (4)    | МНК   | –          | $3,1927 \cdot 10^{-4}$ | $-9,500 \cdot 10^{-4}$ | 0,5169        |
| (2)    | МНМ   | 0,1199     | $2,605 \cdot 10^{-4}$  | –                      | 0,5263        |
| (4)    | МНМ   | –          | $3,391 \cdot 10^{-4}$  | $-1,413 \cdot 10^{-8}$ | 0,5137        |
| (7)    | МНМ   | 0,381      | $4,057 \cdot 10^{-4}$  | –                      | <b>0,5126</b> |

Таблица 5

Изотропные модели на основе уравнения Маттига

| Модель | «*» | Метод | $q_0$  | $S_0^*$               | $d$           |
|--------|-----|-------|--------|-----------------------|---------------|
| (6)    | R   | МНМ   | 1,0001 | $4,386 \cdot 10^{-5}$ | <b>0,0228</b> |
| (6)    | Q   | МНМ   | 0,1196 | $3,979 \cdot 10^{-4}$ | 0,5138        |

Нетрудно заметить, что на погрешности неадекватности изотропных моделей их структура значимо не влияет. В то же время проверка всей совокупности данных [61] на статистическую однородность относительно модели характеристики положения на основе уравнения Маттига методом композиционной идентификации позволила установить различия в ориентации дипольной анизотропии красного смещения радиогалактик и квазаров (табл. 6).

Таблица 6

Протокол композиционной идентификации диаграммы Хаббла на основе строгого решения уравнения Маттига

| «*» | № сектора | $N$ | $d$    | $q_0$   | $S, \text{ пс}^{-1}$   | $h$    |
|-----|-----------|-----|--------|---------|------------------------|--------|
| Q   | 0         | 201 | 0,514  | 0,1196  | $3,9786 \cdot 10^{-4}$ | 0,7420 |
|     | 1         | 50  | 0,397  | 0,1196  | $5,8961 \cdot 10^{-4}$ | 0,5498 |
|     | 2         | 50  | 0,577  | 0,1196  | $5,4066 \cdot 10^{-4}$ | 0,5042 |
|     | 3         | 26  | 0,529  | -0,0341 | $4,1226 \cdot 10^{-4}$ | 0,3844 |
|     | 4         | 49  | 0,332  | 0,0638  | $3,9786 \cdot 10^{-4}$ | 0,3710 |
|     | 5         | 19  | 0,527  | -0,2082 | $3,9686 \cdot 10^{-4}$ | 0,3701 |
|     | 6         | 5   | 0,474  | 1,0000  | $5,9071 \cdot 10^{-4}$ | 1,1017 |
| R   | 0         | 172 | 0,0228 | 1,0001  | $4,386 \cdot 10^{-5}$  | 0,7420 |
|     | 1         | 40  | 0,0135 | 0,987   | $3,421 \cdot 10^{-5}$  | 0,5787 |
|     | 2         | 51  | 0,0191 | 0,42    | $4,892 \cdot 10^{-5}$  | 0,8276 |
|     | 3         | 22  | 0,0320 | 0,99863 | $3,404 \cdot 10^{-5}$  | 0,5759 |
|     | 4         | 21  | 0,0230 | 0,271   | $5,356 \cdot 10^{-5}$  | 0,9061 |
|     | 5         | 20  | 0,0251 | 1,0001  | $4,386 \cdot 10^{-5}$  | 0,7420 |
|     | 6         | 17  | 0,231  | 1,0001  | $4,386 \cdot 10^{-5}$  | 0,7420 |



Этот результат дополняет интересный эффект.

Дело в том, что в 1992 году Н. Агр по данным W. Campbell и R. Trumpler показал [69], что для внеземных источников с красным смещением в спектре

$$z = K \cdot 10^{-0,2M},$$

где  $K = 2,6 \cdot 10^{-6}$  – постоянная К-эффекта. Но тогда

$$D_L = (z_Q / K) \cdot 10^{1+0,2m}. \quad (18)$$

Идентификация моделей красного смещения  $z(D_L)$  с учетом соотношения (18) показала, что САО случайной составляющей погрешности неадекватности уменьшилось вдвое, а масштабы моделей возросли на порядок. При этом уже на этапе подготовки исходных данных с использованием преобразования (18) был обнаружен эффект группирования данных, не согласующегося с т.н. «ускоренным расширением Вселенной».

Таким образом, анизотропия диаграммы Хаббла является статистически значимой.

При этом для квазаров в плоскости сверхгалактического экватора вне зоны затенения Млечным Путем по оси Aquarius–Virgo  $h = 0,50 \dots 0,55$ , а в промежутках – 0,37 (зона затенения и район Ursa Major) и 1,10 (район Pavo). Разброс этих значений сопоставим с расхождением оценок постоянной Хаббла различными методами в HST KP.

Для радиогалактик  $h = 0,57 \dots 0,91$ . Ее значение в Ursa Major и Pavo совпадает с калибровочным значением  $h = 0,742$ , в районе минимума дипольной анизотропии микроволнового фонового излучения  $h = 0,83$ , а в зоне затенения –  $h = 0,90$ . В области максимума дипольной анизотропии реликтового излучения Хаббла  $h = 0,57$ .

Возможность приведения полученных моделей к единой шкале расстояний по модулю расстояния указывает на эволюционный характер морфологических различий радиогалактик и квазаров.

### Заключение

Классическое понятие неопределенности связано с описанием неопределенных и случайных величин распределениями вероятностей и их композициями в зависимости от математической модели связи между ними. И для того, чтобы перейти от «реалистических» оценок GUM к «безопасным», требуется дополнительно к «коэффициенту охвата» использовать известные в математической статистике коэффициенты верхних доверительных границ для параметров положения и рассеяния.

Рассмотренные примеры показывают, что даже очень высокий уровень точности астрофизических измерений может оказаться недостаточным для слишком сложного объекта измерений, а проблемы применения статистических методов остаются общими для различных приложений.

### Список литературы

1. Р 50.2.004–2000 ГСИ. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения.
2. МИ 2916–2005 ГСИ. Идентификация распределений вероятностей при решении измерительных задач.
3. ГОСТ Р ИСО 5725–2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений.
4. РМГ 43–2001. ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений».
5. РМГ 91–2009. ГСИ. Совместное использование понятий «погрешность измерений» и «неопределенность измерения». Общие принципы.
6. ПМГ 96–2009. ГСИ. Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления.
7. Руководство по выражению неопределенности измерения. Пер. с англ. Научный редактор проф. Слаев В.А. СПб: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999. 134 с.
8. ГОСТ 8.586.5–2005. ГСИ. Измерение расхода и количества жидкостей и газов с помощью стандартных сужающих устройств. Ч. 5. Методика выполнения измерений.
9. ГОСТ Р 8.624–2006. ГСИ. Термометры сопротивления из платины, меди и никеля. Методика поверки.
10. МИ 3281–2010. ГСИ. Оценка результатов измерений. Пояснения к «Руководству по выражению неопределенности измерений».
11. Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло: пер. с англ. / Научные редакторы В.А. Слаев, А.Г. Чуновкина. – СПб: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 2010. – 182 с.
12. Рабинович С.Г. О необходимости создания новых рекомендаций по оцениванию погрешностей и неопределенностей измерений / С.Г. Рабинович // Системы обработки информации: сб. науч. пр. – Х.: ХУПС, 2010. – Вып. 4 (85). – С. 23–26.
13. РМГ 29–99 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения.
14. Алимов Ю.И. О логическом построении основ математической статистики как прикладной дисциплины / Ю.И. Алимов // Автоматика. – 1971. – № 3. – С. 88–91.
15. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей / В.Н. Тутубалин. – М.: МГУ, 1972. – 230 с.
16. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика / Ф.П. Тарасенко. – Томск: ТГУ, 1976. – 294 с.
17. Алимов Ю.И. Элементы теории эксперимента. Опытная проверка утверждений математической статистики / Ю.И. Алимов. – Свердловск: Изд-во УПИ, 1978. – 92 с.
18. Левин С.Ф. Комбинированный метод статистического моделирования / С.Ф. Левин. – М.: АН СССР, 1978. – 75 с.
19. Налимов В.В. Язык вероятностных представлений / В.В. Налимов // Автоматика. – 1979. – № 1. – С. 66–74.
20. Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики / Ю.И. Алимов. – М.: Знание, 1980. – 64 с.
21. Левин С.Ф. Оптимальная интерполяционная фильтрация статистических характеристик случайных функций в детерминированной версии метода Монте-Карло и закон красного смещения / С.Ф. Левин. – М.: АН СССР, НСК, 1980. – 56 с.
22. Вопросы кибернетики, ВК-94: Статистические методы в теории обеспечения эксплуатации / Под ред.

С.Ф. Левина. – М.: АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1982. – 152 с.

23. Холлендер М. Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д.А. Вулф. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 520 с.

24. Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1983. – 400 с.

25. Левин С.Ф. Основы теории контроля / С.Ф. Левин. – М.: МО СССР, 1983. – 51 с.

26. Ивахненко А.Г. Помехоустойчивость моделирования / А.Г. Ивахненко, В.С. Степашко. – К.: Наукова думка, 1985. – 214 с.

27. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.

28. Фомин А.Ф. Аналоговые и цифровые синхронно-фазовые измерители и демодуляторы / А.Ф. Фомин, А.И. Горошавин, О.И. Шелухин. – М.: Радио и связь, 1987. – 248 с.

29. Левин С.Ф. Научно-методическое обеспечение гарантированности решения метрологических задач вероятностно-статистическими методами / С.Ф. Левин, А.П. Блинов // Измерительная техника. – 1988. – № 12. – С. 5-8.

30. Левин С.Ф. Гарантированность программ обеспечения эксплуатации техники / С.Ф. Левин. – К.: Знание, 1989. – 24 с.

31. Мостеллер Ф. Анализ данных и регрессия / Ф. Мостеллер, Дж. Тьюки. – М.: Финансы и статистика, 1982. – Вып. 1. – 317 с.; Вып. 2. – 239 с.

32. Вучков И. Прикладной линейный регрессионный анализ / И. Вучков, Л. Бояджиева, Е. Солаков. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 239 с.

33. Хьюбер П. Робастность в статистике / П. Хьюбер. – М.: Мир, 1984. – 304 с.

34. Робастность в статистике: Подход на основе функций вливания / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль. – М.: Мир, 1989. – 512 с.

35. Левин С.Ф. Воспроизводимость или робастность в статистике? Подход на основе интерполяционной концепции вероятности в приближении аксиоматикой А.Н. Колмогорова / С.Ф. Левин // Статистическая идентификация, прогнозирование и контроль. Методические рекомендации. – МО СССР, 1990. – С. 3-11.

36. Статистическая идентификация, прогнозирование и контроль. Тезисы докладов научно-технического семинара. – Севастополь: Знание, 1991. – 78 с.

37. Левин С.Ф. Контроль технических объектов по аварийным и определяющим параметрам / С.Ф. Левин. – К.: Знание, 1992. – 24 с.

38. Левин С.Ф. Погрешности измерений и вычислений как причина «катастрофического феномена 1985–1986 годов» в авиационной и ракетно-космической технике / С.Ф. Левин // Контрольно-измерительные приборы и системы. – 2000. – № 3. – С. 21-25.

39. Оценивание характеристик достоверности прогнозирующего контроля в автоматизированных системах метрологического сопровождения / С.Ф. Левин, А.Н. Баранов, Д.А. Веретенин, Х.М. Халед // Измерительная техника. – 1991. – № 12. – С. 18-20.

40. Левин С.Ф. Планирование испытаний при метрологическом аттестовании программного обеспечения статистической обработки данных / С.Ф. Левин, Е.В. Маркова // Измерительная техника. – 1995. – № 6. – С. 9-13.

41. Пособило В.А. Применение метода максимума компактности для прогнозирования изменения метрологических характеристик эталонов / В.А. Пособило // Из-

мерительная техника. – 1995. – № 6. – С. 13-14.

42. Левин С.Ф. Метод максимума компактности и комплексные измерительные задачи / С.Ф. Левин // Измерительная техника. – 1995. – № 7. – С. 15-21.

43. Левин С.Ф. Системы метрологического сопровождения измерительных задач / С.Ф. Левин, Е.В. Маркова, В.А. Пособило // Контрольно-измерительные приборы и системы. – 1997. – № 4. – С. 13-14.

44. РРТ 507-98 ГСИ. Задачи измерительные. Методы решения. Термины и определения. – М.: Госстандарт РФ, РОСТЕСТ – Москва, 1998.

45. Система метрологического сопровождения статических измерительных задач «ММК–СТАТ М». Руководство пользователя / С.Ф. Левин, А.Н. Лисенков, О.В. Сенько, Е.И. Харатьян. – М.: РОСТЕСТ–Москва Госстандарта России, ВЦ РАН, 1998.

46. МИ 1317–2004. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.

47. Гогин С.С. Программа «ММИ–поверка» / С.С. Гогин // Измерительная техника. – 2006. – № 7. – С. 20-21.

48. Левин С.Ф. Автоматизация обработки данных многократных измерений по программе «ММИ–ПОВЕРКА 2.0» / С.Ф. Левин, И.А. Сулейман // Системы обработки информации: сб. науч. пр. – Х.: ХУПС, 2011. – Вып. 1 (91). – С. 38-42.

49. Тищенко В.А. Комментарии к метрологическим документам, регламентирующим обработку результатов измерений / В.А. Тищенко, В.И. Токатлы, В.И. Лукьянов // Законодательная и прикладная метрология. – 2006. – № 4. – С. 7-12.

50. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – 2-е изд., доп. и исправленное. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 350 с.

51. Левин С.Ф. Основы теории контроля / С.Ф. Левин. – М.: МО СССР, 1983. – 51 с.

52. Левин С.Ф. Математическая теория измерительных задач. Ч. 1-10 / С.Ф. Левин // Контрольно-измерительные приборы и системы. – 1999-2006.

53. Левин С.Ф. Теория измерительных задач идентификации / С.Ф. Левин // Измерительная техника. – 2001. – № 7. – С. 8-17.

54. Левин С.Ф. Идентификация распределений вероятностей / С.Ф. Левин // Измерительная техника. – 2005. – № 2. – С. 3-9.

55. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1986. – 535 с.

56. Р 50.1.037–2002 ГСИ. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии.

57. Левин С.Ф. Статистические методы идентификации моделей в теории измерительных задач / С.Ф. Левин // Состояние и проблемы измерений: сб. материалов XI Всероссийской конференции, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 26-28 апреля 2011 г. – М.: Министерство образования и науки РФ, 2011. – С. 21-23.

58. Levin S.F. On spatial anisotropy of red shift in spectrums of extragalactic sources / S.F. Levin // Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of XV International Meeting: Moscow, 6-9 July 2009/Edited by M.C. Duffy et al. – Moscow: BMSTU, 2009. – P. 234-240.

59. Левин С.Ф. Математическая теория измерительных задач: Приложения. Измерительная задача идентификации крупномасштабной анизотропии красного смещения в спектрах излучения внегалактических

источников / С.Ф. Левин // Контрольно-измерительные приборы и системы. – 2009. – № 6. – С. 36-37; 2010. – № 1. – С. 35-36; 2010. – № 2. – С. 36-37.

60. Левин С.Ф. Измерительная задача идентификации анизотропии красного смещения / С.Ф. Левин // Метрология. – 2010. – № 5. – С. 3-21.

61. Ленг К. Астрофизические формулы / К. Ленг. – М.: Мир, 1978. – Ч. 2. – 383 с.

62. Левин С.Ф. Метрологическая аттестация математических моделей в измерительных задачах гравитации и космологии / С.Ф. Левин // Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конференция: тезисы докладов. – М.: РГО, 1999. – С. 245.

63. Levin S.F. Identification of interpreting models in General Relativity and Cosmology / S.F. Levin // Physical Interpretations of Relativity Theory. Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2003. Moscow: 30 June – 3 July 2003. – M., Liverpool, Sunderland, 2003. – P. 72-81.

64. Верхованов О.В. Методы и результаты наблюдательной космологии: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук / О.В. Верхованов. – Н. Архыз: САО РАН, 2006. – 250 с.

65. Сажин М.В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения / М.В. Сажин // УФН. – 2004. – Т. 174, № 2. – С. 197.

66. Бербидж Дж. Квазары / Дж. Бербидж, М. Бербидж. – М.: Мир, 1969. – 239 с.

67. Levin S.F. Identification of red shift anisotropy on the basis of the exact decision of Mattig equation / S.F. Levin // The VI International Meeting «Finsler Extensions of Relativity Theory»: Moscow – Fryazino, Russia, 1–7 November 2010 (Abstracts of reports). – Moscow: VMSTU – RIHSGP, 2010. – P. 2.

68. Левин С.Ф. Композиционная идентификация диаграммы Хаббла для радиогалактик и квазаров / С.Ф. Левин // 14-ая Российская гравитационная конференция. Международная научная конференция по гравитации, космологии и астрофизике. 27 июня – 2 июля 2011 года, УлГПУ, Ульяновск, Россия. Сборник тезисов докладов. – Ульяновск: РГО, 2011. – С. 145.

69. Arp H.C. Red shifts of high-luminosity stars – the K effect, the Trumpler effect and mass-loss correction / H.C. Arp // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1992. – V. 258. – P. 800-810.

Поступила в редколлегию 11.08.2011

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

#### СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ТА КЛАСИЧНА НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ

С.Ф. Левін

Викладено основні положення статистичних методів, які використовуються в теорії вимірювальних завдань при класичному розумінні невизначеності, і розглянуті наслідки порушення умов їх застосування в завданні ідентифікації космологічних моделей.

**Ключові слова:** невизначеність в широкому сенсі, розподіл ймовірностей, вимірювальне завдання, похибка неадекватності, діаграма Хаббла, рівняння Маттіґа.

#### STATISTICAL METHODS OF MEASUREMENT PROBLEMS THEORY AND CLASSICAL UNCERTAINTY

S.F. Levin

The basic provisions of the statistical methods used in the theory of measurement problems at wide extent of uncertainty are developed, and the consequences of violating of the conditions of their applicability in the identification problem of cosmological models are considered.

**Keywords:** uncertainty to wide extent, the probability distribution, measuring problem, the error of inadequacy, the Hubble diagram, the Mattig equation.