

УДК 006.91:53.089.68

В.М. Мокійчук, О.В. Самойліченко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

## ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ ВИМІРЮВАННЯ ЗА ОДНОМОДАЛЬНОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

У статті розглянуто метод оцінювання результату вимірювання для одномодального несиметричного розподілу результатів спостережень, який ґрунтується на застосуванні апроксимуючого  $S_B$  розподілу Джонсона. Як оцінку результату вимірювання запропоновано використовувати оцінку моди. Запропоновано ітераційну процедуру визначення моди, показано області збіжності запропонованої процедури, що дозволило розробити методу визначення результату вимірювання. Наведено приклади застосування запропонованого методу.

**Ключові слова:** результат вимірювання, одномодальний розподіл, несиметричний розподіл, невизначеність, розподіл Джонсона.

### Вступ

Оцінювання результату вимірювання та його розширеної невизначеності може виконуватися як класичними методами, представленими в [1], якщо виконується умова гауссівського закону розподілу сумарної невизначеності, так і альтернативними методами [2 – 5], направленими на уточнення інтервалу розширеної невизначеності та результату вимірювання при порушенні умови гауссовості. Слід зауважити, що альтернативні методи будуть забезпечувати точну оцінку інтервалу розширеної невизначеності за симетричних та несиметричних законах розподілу, однак для оцінювання результату несиметричних розподілів, методика оцінювання центру групування спостережень як результату вимірювання не наводиться, що може призвести до його хибних оцінок. На думку авторів це питання є недостатньо дослідженим в літературі, хоча представляє собою значний практичний інтерес.

### Метод оцінювання результату вимірювання з використанням розподілу $S_B$ Джонсона

Для розв'язку поставленої задачі в статті запропоновано метод оцінювання результату вимірювань за одномодального несиметричного розподілу спостережень, який ґрунтується на застосуванні  $S_B$  розподілу Джонсона. Перевага застосування сімейства розподілу Джонсона для задач оцінювання результату вимірювання полягає в тому, що він дозволяє отримати точні оцінки при оцінюванні невизначеності як за типом А так і типом В [6] та їх комбінаціях для різних законах розподілу складових невизначеності.

Функція щільності розподілу імовірності (ФЩРІ) розподілу Джонсона  $S_B$  визначається наступним рівнянням:

$$f(x, \varepsilon, \lambda, \gamma, \eta) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x - \varepsilon)(\lambda - x + \varepsilon)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \gamma + \eta \ln \left( \frac{x - \varepsilon}{\lambda - x + \varepsilon} \right) \right]^2},$$

$$\varepsilon \leq x \leq \varepsilon + \lambda, \eta > 0, -\infty < \gamma < \infty, \lambda > 0, -\infty < \varepsilon < \infty. \quad (1)$$

Параметри  $\gamma$  та  $\eta$  визначають форму розподілу, параметри  $\varepsilon$  і  $\lambda$  – область визначення. Оцінювати параметри можна квантильним методом (невизначеність типу А) та методом моментів (невизначеність типу В). Параметр  $\gamma$  визначає симетричність закону розподілу. Якщо  $\gamma = 0$ , то розподіл є симетричним і результат вимірювання можна визначити як півсуму границь розподілу  $\varepsilon + \lambda / 2$ .

Якщо параметр  $\gamma \neq 0$ , то розподіл є несиметричним, в цьому випадку пропонується використовувати запропонований метод, за яким результат вимірювання визначається як мода розподілу  $S_B$ .

Застосування зазначеного методу має обмеження: при певних співвідношеннях параметрів  $\gamma$  та  $\eta$  розподіл може не мати моди або бути двомодальним (рис. 1).

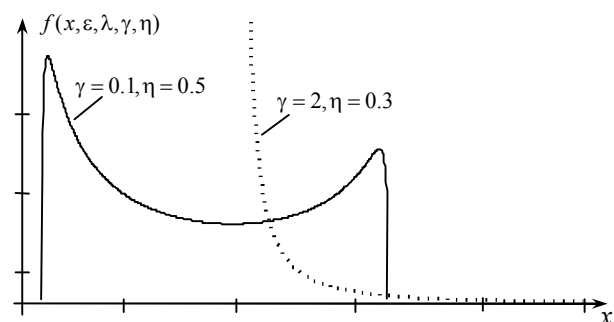


Рис. 1. Функції ЩРІ  $S_B$  розподілу Джонсона

У цих випадках пропонується нижче процедура не застосовується.

### Ітераційна процедура оцінювання моди розподілу

Оцінювання моди передбачає застосування аналітичного методу визначення максимуму функції, для чого прирівнюємо до нуля першу похідну ФЦПІ  $S_B$  розподілу Джонсона (1). Розв'язок цього рівняння  $x$  буде шуканим значенням моди.

Після необхідних математичних перетворень кінцеве рівняння має вигляд:

$$\lambda - 2x + 2\varepsilon + \eta\lambda\gamma + \eta^2\lambda \ln\left(-\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + \lambda - x}\right) = 0. \quad (2)$$

Отримане нелінійне параметричне трансцендентне рівняння не має розв'язку у явному вигляді і потребує застосування наближених методів.

З існуючих наближених методів розв'язку таких рівнянь був обраний метод послідовних наближень. Попередньо вихідне рівняння (2) було перетворено до експоненційного вигляду для забезпечення стійкості ітераційної процедури:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda - 2x + 2\varepsilon + \eta\lambda\gamma}{\eta^2\lambda} &= \ln\left(-\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + \lambda - x}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\varepsilon + \lambda - x}{x - \varepsilon} e^{\frac{\lambda - 2x + 2\varepsilon + \eta\lambda\gamma}{\eta^2\lambda}} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

З рівняння (3) отримаємо наступний вираз для ітераційної процедури визначення моди:

$$x_{k+1} = (\varepsilon + \lambda - x_k) \cdot e^{\frac{\lambda - 2x_k + 2\varepsilon + \eta\lambda\gamma}{\eta^2\lambda}} + \varepsilon. \quad (4)$$

Як початкове значення  $x_k$  для першої ітерації пропонується брати значення  $\varepsilon + \lambda / 2$ . Ітерації слід повторювати до тих пір, поки стане виконуватись нерівність  $|x_{k+1} - x_k| \leq \Delta_{\text{доп.}}$ , де  $\Delta_{\text{доп.}}$  – заздалегідь встановлене значення допустимої похибки процедури. За оцінку моди приймають значення останньої ітерації

$$\text{Mode} = x_{k+1}. \quad (5)$$

Значення границь невизначеності результату визначаються наступними виразами:

$$U_- = \text{Mode} - \varepsilon; \quad U_+ = \varepsilon + \lambda - \text{Mode}.$$

Для обґрунтування можливості застосування даної ітераційної процедури необхідно встановити області її збіжності. Достатнім критерієм збіжності для виразу (4) буде умова негативного значення показника експоненти у виразі (4). Оскільки областю визначення ФЦПІ (1) є  $\varepsilon \leq x \leq \varepsilon + \lambda$ , то доцільною є перевірка умови збіжності для граничних значень  $x = \varepsilon$  та  $x = \varepsilon + \lambda$ . Отже, при  $x = \varepsilon$  маємо показник експоненти

$$-(\lambda - 2\varepsilon + 2\varepsilon + \eta\lambda\gamma) / \eta^2\lambda = -[\lambda + \eta\lambda\gamma] / (\eta^2\lambda).$$

Оскільки  $\eta > 0$ ,  $\lambda > 0$  то показник буде негативним за умов  $\gamma \geq 0$ , або  $\lambda \geq \eta\lambda\gamma$ .

При  $x = \varepsilon + \lambda$  маємо показник експоненти

$$-\frac{\lambda - 2\varepsilon - 2\lambda + 2\varepsilon + \eta\lambda\gamma}{\eta^2\lambda} = -\frac{-\lambda + \eta\lambda\gamma}{\eta^2\lambda}.$$

Показник буде приймати від'ємні значення за умов  $\gamma \geq 0$  і  $\lambda \leq \eta\lambda\gamma \Rightarrow \eta\gamma \geq 1$ .

Тоді загальними умовами збіжності є:

$$\gamma \geq 0 \text{ і } |\eta\gamma| \geq 1. \quad (6)$$

Якщо умова  $\eta\gamma \geq 1$  не виконується, рекомендується побудувати отриману функцію за виразом (1). При цьому можливі випадки: а) мода відсутня або розподіл двомодальний (рис. 1) – використовувати запропонований метод неможливо; б) отриманий розподіл має моду – результат вимірювання оцінюють як моду розподілу, тобто застосовують запропоновану вище процедуру в залежності від знаку  $\gamma$ .

Розглянемо випадок  $\gamma < 0$ . Властивості функції (1) такі, що при зміні знаку параметра  $\gamma$  функція відображується дзеркально відносно середини області визначення, яким є значення  $\varepsilon + \lambda / 2$  (рис. 2).

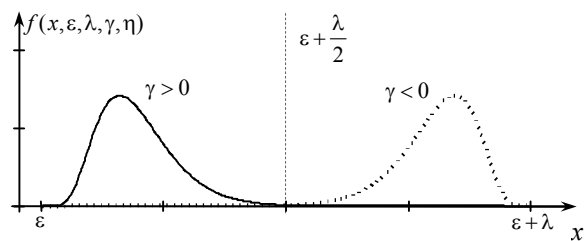


Рис. 2. Функція ЩПІ  $S_B$  при зміні знаку  $\gamma$

Отже, якщо  $\gamma < 0$ , то для оцінювання моди доцільно застосувати ітераційну процедуру підставивши у вираз (4) модуль  $\gamma$ . Отримане таким чином значення моди  $x'$  необхідно перерахувати у значення шуканої моди:

$$\text{Mode} = 2\varepsilon + \lambda - x'. \quad (7)$$

Враховуючи вищевказані результати, **методика визначення результату вимірювання** наступна:

1. За наявними результатами спостережень одним із методів (квантильним або моментним) визначають параметри  $\varepsilon, \lambda, \gamma, \eta$   $S_B$  розподілу Джонсона.

2. Перевіряють умову (6). У разі виконання обох складових умови, оцінку результату вимірювання визначають за виразами (4) та (5).

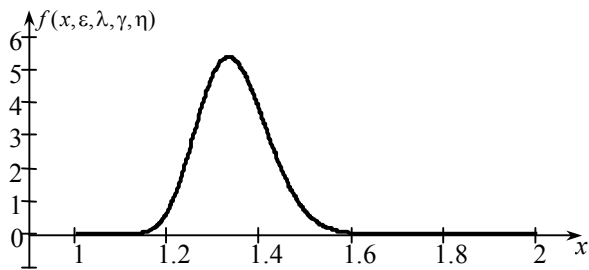
3. Якщо  $\gamma \geq 0$ , а  $\eta\gamma < 1$  візуально визначають наявність моди. За її наявності оцінювання результату вимірювання виконують за виразами (4) та (5).

4. Якщо  $\eta\gamma \geq 1$ , а  $\gamma < 0$  проводять оцінювання за формулою (7) та виразом (4) для значення  $|\gamma|$ .

5. Якщо  $\gamma < 0$  і  $\eta\gamma < 1$  візуально визначають наявність моди. За її наявності оцінювання результату вимірювання виконують за п. 4.

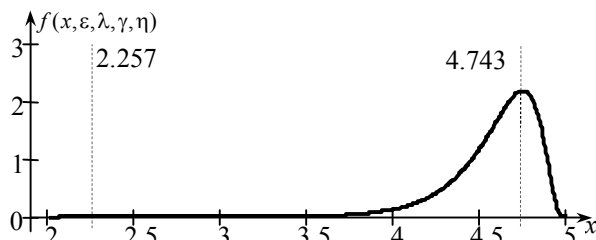
### Приклади застосування запропонованого методу для різних випадків розподілів даних

Приклад 1. При оцінюванні параметрів  $S_B$  розподілу Джонсона отримані наступні результати  $\varepsilon = 1, \lambda = 1, \gamma = 2, \eta = 3$  (рис. 3).

Рис. 3. ФЩПРІ  $S_B$  для  $\varepsilon = 1, \lambda = 1, \gamma = 2, \eta = 3$ 

Умова (6) виконується, приймемо початкове значення для ітераційної процедури  $x_1 = 1.5$ , значення допустимої похибки процедури  $\Delta_{\text{доп.}} = 10^{-3}$ . Отже  $x_2 = 1.2567$ ,  $x_3 = 1.3615$ ,  $x_4 = 1.3179$ ,  $x_5 = 1.3363$ ,  $x_6 = 1.3286$ ,  $x_7 = 1.3318$ ,  $x_8 = 1.3305$ ,  $x_9 = 1.3310$ . Оцінка результату вимірювання дорівнює 1.331.

Приклад 2. При оцінюванні параметрів розподілу Джонсона отримані наступні результати  $\varepsilon = 2, \lambda = 3, \gamma = -3, \eta = 1.5$  (рис. 4).

Рис. 4. ФЩПРІ  $S_B$  для  $\varepsilon = 2, \lambda = 3, \gamma = -3, \eta = 1.5$ 

Умова (6) не виконується, приймемо початкове значення для ітераційної процедури  $x_1 = 3.5$ , значення параметрів  $\varepsilon = 2, \lambda = 3, \gamma = 3, \eta = 1.5$ , значення допустимої похибки процедури  $\Delta_{\text{доп.}} = 10^{-3}$ . Отже  $x_2 = 2.2030$ ,  $x_3 = 2.2578$ ,  $x_4 = 2.2568$ ,  $x_5 = 2.2569$ . Проміжне значення моди  $x' = x_5 = 2.257$ . Оцінка результату вимірювання (7) дорівнює  $4+3-2.257 = 4.743$ .

## ВИСНОВКИ

В статті розглянуто важливе питання оцінювання результату вимірювання за несиметричних

розподілів. Запропонований метод ґрунтується на апроксимації сумарного закону розподілу невизначеності ФЩПРІ з сімейства розподілів  $S_B$  Джонсона та оцінюванням результату вимірювання як моди отриманої ФЩПРІ. Розроблено ітераційну процедуру оцінювання моди розподілу та досліджені межі її збіжності, що дозволило розробити методику визначення результату вимірювання за отриманими у статті формулами (4), (5), (7). Точність процедури залежить від кількості ітерацій. Метод апробовано на прикладах з різними випадками розподілів даних, показано легкість оцінювання результату вимірювання.

## Список літератури

1. *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995): ISO/IEC Guide 98-3:2008.* – [Accepted 2008-09-30]. – Geneva : ISO, 2008. – 120 p. – (International standard).
2. *Метод оцінювання розширеної невизначеності результатів вимірювань за допомогою перетворення Джонсона* / О.В. Самойліченко, В.С. Єременко, В.М. Мокиїчук, Ж.О. Павленко // *Вісник нац. техн. ун-ту України «Київський політехнічний інститут». Серія Приладобудування.* – 2009. – № 38. – С. 93-101.
3. *Захаров И.П. Применение численных методов для оценивания неопределенности в измерениях* / И.П. Захаров // *Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Інформатика та моделювання.* – Х.: НТУ „ХПІ”, 2006. – Вип. 40. – С. 96-100.
4. *Карпенко А.Н. Объединение погрешностей результатов измерений интервального анализа* / А.Н. Карпенко // *Информационные технологии и компьютерная инженерия.* – 2008. – № 3 (13). – С. 70-75.
5. *Дорожовець М.М. Оцінювання результатів спостережень шляхом безпосереднього їх порівняння зі зразковими спостереженнями* / М.М. Дорожовець // *Системи обробки інформації: зб. наук. пр.* – Х.: ХУПС, 2010. – Вип. 4 (85). – С. 30-36.
6. *Єременко В.С. Аналіз методів оцінювання розширеної невизначеності при атестації стандартних зразків* / В.С. Єременко, О.В. Самойліченко, В.М. Мокиїчук // *Метрологія та вимірювальна техніка: наук. праці конф.; тези доп.* – Х.: УкрНДНЦ, 2010. – Т. 1. – С. 109-112.

Надійшла до редколегії 22.08.2011

Рецензент: д-р техн. наук проф. Л.М. Щербак, Національний авіаційний університет, Київ, Україна.

## ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ ОДНОМОДАЛЬНОМ НЕСИММЕТРИЧНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ

В.М. Мокиїчук, О.В. Самойліченко

*В статті розглянуто метод оцінювання результату вимірювання для одномодального несиметричного розподілу результатів спостережень, який базується на використанні апроксимуючого  $S_B$  розподілу Джонсона. В якості результату вимірювання пропонується використовувати оцінку моди. Представлено ітераційну процедуру визначення моди, показані області збіжності запропонованої процедури, що дозволило розробити методику визначення результату вимірювання. Приведені приклади використання запропонованого методу.*

**Ключевые слова:** результат измерения, одномодальное распределение, неопределенность, распределение Джонсона.

## ESTIMATION OF A MEASUREMENT RESULT OF A SINGLE-MODE ASYMMETRIC DATA DISTRIBUTION LAW

V.M. Mokiychuk, O.V. Samoylichenko

*The method of measurement result estimation for single-mode asymmetric distribution. Method based on Johnson's approximate  $S_B$  distribution is considered. The mode estimation introduced as measurement result estimation. The iterative procedure for mode estimation is given, regions of convergence for given procedure were shown. It helps to develop the methodology of measurement result determination. The examples of introduced method usage were given.*

**Keywords:** measurement result, single-mode distribution, asymmetric data distribution, uncertainty, Johnson's distribution.