УДК 519.682.1

С.В. Минухин

Харьковский национальный экономический университет, Харьков

ОЦЕНКИ АЛГОРИТМОВ И СЛОЖНОСТИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ

Развитие современных информационных систем формирует новые направления исследований, связанные с расширением возможностей использования полученных теоретических результатов. К таким задачам относится задача о наименьшем покрытии (ЗНП), имеющая широкий спектр различных приложений в теории построения сложных систем, системах диагностики вычислительных систем и сетей разработки их программного и математического обеспечения, а также при планировании распределения различных типов ресурсов в современных информационно-коммуникационных системах – GRID-системах [1]. Данная работа посвящена исследованию точности и временной сложности алгоритмов решения ЗНП. Математическая модель, реализующая задачу о наименьшем покрытии (ЗНП), может быть сформулирована как задача линейного булевого программирования:

$$L = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j \ge 1, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\beta_{ij} \in \{0,1\};\ x_j \in \{0,1\}.$$

В общем случае ЗНП можно рассматривать как задачу определения минимального количества столбцов, покрывающих единицами все строки некоторой булевой матрицы **B** размерности $m \times n$.

Одним из самих известных и хорошо изученных приближенных полиномиальных алгоритмов для решения этой задачи является жадный алгоритм. Определим размерность задачи о покрытии следующим образом: если все столбцы матрицы **B**, определяющие мощность покрытия, являются независимыми множествами, то их общее количество определится по формуле:

$$\frac{m}{n/k} = \frac{mk}{n}.$$

Введем обозначение решения задачи о покрытии MC(B).

Используя стандартный подход к получению погрешности аппроксимации жадного алгоритма, и то, что точное решение (для данного случая) находится в соответствии с выражением

$$\mathrm{Copt} = n/k, \qquad (1)$$

получим, при условии, что минимальное количество единиц в каждой строке матрицы определяется величиной k_{min}, верхнюю оценку точного решения задачи о покрытии:

$$MC(B) \le \frac{n}{k_{min}}\left(1 + \ln\frac{m \cdot k_{min}}{n}\right). \qquad (2)$$

Аналогичным образом можно получить нижнюю оценку точного решения для жадного алгоритма с учетом того, что максимальное количество единиц в каждой строке матрицы определяется величиной k_{max}:

$$\frac{n}{k_{max}}\left(1 + \ln\frac{m \cdot k_{max}}{n}\right) \le MC(B). \qquad (3)$$

Таким образом, значение оценки точного решения задачи о покрытии, получаемого жадным алгоритмом, определится неравенством:

$$\frac{n}{k_{max}}\left(1 + \ln\frac{m \cdot k_{max}}{n}\right) \le MC(B) \le \frac{n}{k_{min}}\left(1 + \ln\frac{m \cdot k_{min}}{n}\right). \qquad (4)$$

Отметим, что выражения (2), (3) получены при условии, что столбцы, входящие в покрытие, являются независимыми множествами, что возможно при выполнении (1) и совпадают с оценками, полученными в [2]. Если в матрице все столбцы, вошедшие в покрытие, образуют наддизъюнкты [3] для l столбцов, то выражение (1) преобразуется к виду:

$$\mathrm{Copt} = \frac{n}{l \cdot k}.$$

Таким образом, наличие l зависимых столбцов, образующих наддизъюнкты (зависимые строки), для каждого столбца матрицы **B**, вошедшего в покрытие, приводит к уменьшению мощности точного решения.

Рассмотрим случай, когда минимальное количество единиц в столбце матрицы **B** не превышает величины α_{min}.

Для определения временной сложности реализации жадного алгоритма необходимо подсчитать общее количество единиц в каждом столбце, что дает временную сложность O(m), количество расчетов определяется количеством столбцов n, что дает сложность O(m·n), при этом на каждом шаге покрывается не менее α_{min} строк: на первом шаге – m/α_{min}, на втором – $(m - m/\alpha_{min})$ и т.д., и такое же количество раз необходимо выбрать максимальный элемент в массиве размерности, не превышающем n. Таким образом, общая временная сложность алгоритма определится выражением:

$$O\left(m \cdot n + (n/\alpha_{min}) \cdot \log n\right). \qquad (5)$$

Полученная оценка является оценкой сверху для временной сложности реализации жадного алгоритма.

Таким образом, приведенные процедуры позволяют с учетом дополнительной информации о свойствах матрицы B получить верхние и нижние границы оценки точного решения задачи о покрытии (4) и оценку временной сложности (5).

Список литературы

1. Пономаренко В.С. Метод решения задачи о минимальном покрытии как средство планирования в GRID / В.С. Пономаренко, С.В. Листровой // Проблемы управления. – 2008. – № 3. – С. 78-84.

2. Сапоженко А.А. О сложности дизъюнктивных нормальных форм, получаемых с помощью градиентного алгоритма / А.А. Сапоженко // Дискретный анализ. – 1972. – № 5. – С. 111-116.

3. Крывый С.Л. Алгоритм проверки противоречивости множества дизъюнктов в исчислении высказываний / С.Л. Крывый, С.В. Волошин, Н.С. Маркова // Проблеми програмування. – 2008. – № 2-3. Спеціальний випуск. – С. 25-30.