

УДК 519.682.1

С.В. Минухин

Харьковский национальный экономический университет, Харьков

ОЦЕНКИ АЛГОРИТМОВ И СЛОЖНОСТИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ

Развитие современных информационных систем формирует новые направления исследований, связанные с расширением возможностей использования полученных теоретических результатов. К таким задачам относится задача о наименьшем покрытии (ЗНП), имеющая широкий спектр различных приложений в теории построения сложных систем, системах диагностики вычислительных систем и сетей разработки их программного и математического обеспечения, а также при планировании распределения различных типов ресурсов в современных информационно-коммуникационных системах – GRID-системах [1]. Данная работа посвящена исследованию точности и временной сложности алгоритмов решения ЗНП. Математическая модель, реализующая задачу о наименьшем покрытии (ЗНП), может быть сформулирована как задача линейного булевого программирования:

$$L = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j \geq 1, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\beta_{ij} \in \{0, 1\}; \quad x_j \in \{0, 1\}.$$

В общем случае ЗНП можно рассматривать как задачу определения минимального количества столбцов, покрывающих единицами все строки некоторой булевой матрицы \mathbf{B} размерности $m \times n$.

Одним из самых известных и хорошо изученных приближенных полиномиальных алгоритмов для решения этой задачи является жадный алгоритм. Определим размерность задачи о покрытии следующим образом: если все столбцы матрицы \mathbf{B} , определяющие мощность покрытия, являются независимыми множествами, то их общее количество определится по формуле:

$$\frac{m}{n/k} = \frac{mk}{n}.$$

Введем обозначение решения задачи о покрытии $MC(\mathbf{B})$.

Используя стандартный подход к получению погрешности аппроксимации жадного алгоритма, и то, что точное решение (для данного случая) находится в соответствии с выражением

$$Copt = \frac{n}{k}, \quad (1)$$

получим, при условии, что минимальное количество единиц в каждой строке матрицы определяется ве-

личиной k_{\min} , верхнюю оценку точного решения задачи о покрытии:

$$MC(\mathbf{B}) \leq \frac{n}{k_{\min}} \left(1 + \ln \frac{m \cdot k_{\min}}{n} \right). \quad (2)$$

Аналогичным образом можно получить нижнюю оценку точного решения для жадного алгоритма с учетом того, что максимальное количество единиц в каждой строке матрицы определяется величиной k_{\max} :

$$\frac{n}{k_{\max}} \left(1 + \ln \frac{m \cdot k_{\max}}{n} \right) \leq MC(\mathbf{B}). \quad (3)$$

Таким образом, значение оценки точного решения задачи о покрытии, получаемого жадным алгоритмом, определится неравенством:

$$\frac{n}{k_{\max}} \left(1 + \ln \frac{m \cdot k_{\max}}{n} \right) \leq MC(\mathbf{B}) \leq \frac{n}{k_{\min}} \left(1 + \ln \frac{m \cdot k_{\min}}{n} \right). \quad (4)$$

Отметим, что выражения (2), (3) получены при условии, что столбцы, входящие в покрытие, являются независимыми множествами, что возможно при выполнении (1) и совпадают с оценками, полученными в [2]. Если в матрице все столбцы, вошедшие в покрытие, образуют наддизъюнкты [3] для l столбцов, то выражение (1) преобразуется к виду:

$$Copt = \frac{n}{l \cdot k}.$$

Таким образом, наличие l зависимых столбцов, образующих наддизъюнкты (зависимые строки), для каждого столбца матрицы \mathbf{B} , вошедшего в покрытие, приводит к уменьшению мощности точного решения.

Рассмотрим случай, когда минимальное количество единиц в столбце матрицы \mathbf{B} не превышает величины α_{\min} .

Для определения временной сложности реализации жадного алгоритма необходимо подсчитать общее количество единиц в каждом столбце, что дает временную сложность $O(m)$, количество расчетов определяется количеством столбцов n , что дает сложность $O(m \cdot n)$, при этом на каждом шаге покрывается не менее α_{\min} строк: на первом шаге – m/α_{\min} , на втором – $(m - m/\alpha_{\min})$ и т.д., и такое же количество раз необходимо выбрать максимальный элемент в массиве размерности, не превышающей n . Таким образом, общая временная сложность алгоритма определится выражением:

$$O(m \cdot n + (n/\alpha_{\min}) \cdot \log n). \quad (5)$$

Полученная оценка является оценкой сверху для временной сложности реализации жадного алгоритма.

Таким образом, приведенные процедуры позволяют с учетом дополнительной информации о свойствах матрицы B получить верхние и нижние границы оценки точного решения задачи о покрытии (4) и оценку временной сложности (5).

Список литературы

1. Пономаренко В.С. Метод решения задачи о минимальном покрытии как средство планирования в GRID /

В.С. Пономаренко, С.В. Листровой // Проблемы управления. – 2008. – № 3. – С. 78-84.

2. Сапоженко А.А. О сложности дизъюнктивных нормальных форм, получаемых с помощью градиентного алгоритма / А.А. Сапоженко // Дискретный анализ. – 1972. – № 5. – С. 111-116.

3. Кривый С.Л. Алгоритм проверки противоречивости множества дизъюнктов в исчислении высказываний / С.Л. Кривый, С.В. Волошин, Н.С. Маркова // Проблемы програмування. – 2008. – № 2-3. Спеціальний випуск. – С. 25-30.