УДК 517.988.38: 519.613.2: 519.853.6

В.М. Задачин

Харьковский национальный экономический университет, Харьков

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

При оценке параметров нелинейных моделей точка экстремума выбранного критерия оптимальности нередко оказывается вырожденной, что значительно усложняет ее поиск. Известные численные методы решения общей задачи безусловной оптимизации до второго порядка включительно имеют очень низкую скорость сходимости в случае решения вырожденных задач [1]. Это объясняется тем, что, по-видимому, для существенного повышения скорости сходимости в этом случае необходимо использование в методе производных более высокого порядка, чем второй.

Рассматривается вырожденная задача безусловной оптимизации:

$$f(x) \to \underbrace{\min}_{x \in G}, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – четырежды дифференцируемая функция в открытом выпуклом множестве $G \subset R^n$, существует $x^* \in G$ – локальная точка минимума функции $f(x)$, матрица Гессе $f''(x^*)$ вырождена.

Рассмотрим комбинированный адаптивный метод четвертого порядка решения задачи (1), который строит итерационную последовательность приближений точки минимума

$$x^{k+1} = x^k + u_1^k + u_2^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где x^0 – начальное приближение точки минимума, u_1^k, u_2^k – ортогональные векторы, определяемые следующим образом.

На каждой k-й итерации вычисляется вектор $g^k = f'(x^k)$ и матрица $H_k = f''(x^k)$. Матрица H_k по регуляризованному алгоритму $U^T DU$-факторизации [2] представляется в виде

$$H_k = H_{k\varepsilon} + E_k, \qquad (2)$$

где $H_{k\varepsilon} = U_k{}^T D_k U_k$, матрица $D_k = \operatorname{diag}(d_1^k, \ldots, d_{r_k}^k)$, $\left|d_i^k\right| \ge \varepsilon, \; i = \overline{1, r_k}$, $r_k \le n$, U – матрица размерности $r_k \times n$, $E_k = H_k - H_{k\varepsilon}$, ε – параметр регуляризации алгоритма $U^T DU$-факторизации [2]. Затем строятся ортопроекторы $P_k = I - U_k{}^+ U_k$, $P_k^\perp = I - P_k$ (здесь $U_k{}^+$ – матрица, псевдообратная к U_k) на подпространство $\operatorname{Ker} H_{k\varepsilon} = \left\{ x \in R^n \mid H_{k\varepsilon} x = 0 \right\}$ и ортогональное дополнение к нему соответственно.

Теперь функция $f(x)$ в окрестности точки x^k приближается функцией [3]

$$f_k(x) = f_k(u_1, u_2) = f(x^k) + \left(P_k^\perp g^k, u_1\right) + \left(P_k g^k, u_2\right) +$$

$$+\frac{1}{2} H_{k\varepsilon}\left[(u_1)^2\right] + \frac{1}{2} E_k\left[(u_2)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{2} f^{(3)}(x^k)\left[u_1, (u_2)^2\right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(x^k)\left[(u_2)^3\right] + \qquad (3)$$

$$+\frac{1}{24} f^{(4)}(x^k)\left[(u_2)^4\right],$$

которая получается из разложения в ряд Тейлора до четвертого порядка, с учетом того, что: $x - x^k = u_1 + u_2$, $u_1 = P_k^\perp (x - x^k)$, $u_2 = P_k (x - x^k)$, $H_{k\varepsilon} u_2 = 0$, $E_k u_1 = 0$.

Тогда векторы u_1^k, u_2^k определяются как точка минимума функции $f_k(u_1, u_2)$, т. е. из системы уравнений:

$$\frac{\partial f_k(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 0; \; \frac{\partial f_k(u_1, u_2)}{\partial u_{21}} = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что система (4) является линейной по u_1 и кубической по u_2 и поэтому может быть несколько упрощена. Ее можно решить численно, например, методом Ньютона.

Как видно, основная трудность при реализации описанного метода состоит в вычислении производных функции $f(x)$ и решении системы (4). Отметим, что 3-я и 4-я производные в приближении (3) используются только, если $r_k < n$. Если же $r_k = n$, то $u_2 = 0$ и описанный метод превращается в метод Ньютона.

Список литературы

1. *Белаш К.Н. Методы решения вырожденных задач / К.Н. Белаш, А.А. Третьяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, № 7. – С. 1097-1102.*
2. *Мелешко В.И. Факторизации и псевдообращения вырожденных возмущенных знаконеопределенных матриц / В.И. Мелешко, В.М. Задачин // Известия вузов. Математика. – 1987. – № 11. – С. 42-50.*
3. *Задачин В.М. Необходимые и достаточные условия минимума смешанного порядка / В.М. Задачин // Український математичний журнал. – 1989. – Т. 41, № 3. – С. 415-419.*