

---

УДК 517.988.38: 519.613.2: 519.853.6

В.М. Задачин

*Харьковский национальный экономический университет, Харьков*

### **АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

При оценке параметров нелинейных моделей точка экстремума выбранного критерия оптимальности нередко оказывается вырожденной, что значительно усложняет ее поиск. Известные численные методы решения общей задачи безусловной оптими-

зации до второго порядка включительно имеют очень низкую скорость сходимости в случае решения вырожденных задач [1]. Это объясняется тем, что, по-видимому, для существенного повышения скорости сходимости в этом случае необходимо ис-

пользование в методе производных более высокого порядка, чем второй.

Рассматривается вырожденная задача безусловной оптимизации:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in G}, \quad (1)$$

где  $f(x)$  – четырежды дифференцируемая функция в открытом выпуклом множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , существует  $x^* \in G$  – локальная точка минимума функции  $f(x)$ , матрица Гессе  $f''(x^*)$  вырождена.

Рассмотрим комбинированный адаптивный метод четвертого порядка решения задачи (1), который строит итерационную последовательность приближений точки минимума

$$x^{k+1} = x^k + u_1^k + u_2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $x^0$  – начальное приближение точки минимума,  $u_1^k, u_2^k$  – ортогональные векторы, определяемые следующим образом.

На каждой  $k$ -й итерации вычисляется вектор  $g^k = f'(x^k)$  и матрица  $H_k = f''(x^k)$ . Матрица  $H_k$  по регуляризованному алгоритму  $U^T D U$ -факторизации [2] представляется в виде

$$H_k = H_{k\epsilon} + E_k, \quad (2)$$

где  $H_{k\epsilon} = U_k^T D_k U_k$ , матрица  $D_k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_{r_k}^k)$ ,  $|d_i^k| \geq \epsilon$ ,  $i = \overline{1, r_k}$ ,  $r_k \leq n$ ,  $U$  – матрица размерности  $r_k \times n$ ,  $E_k = H_k - H_{k\epsilon}$ ,  $\epsilon$  – параметр регуляризации алгоритма  $U^T D U$ -факторизации [2]. Затем строятся ортопроекторы  $P_k = I - U_k^+ U_k$ ,  $P_k^\perp = I - P_k$  (здесь  $U_k^+$  – матрица, псевдообратная к  $U_k$ ) на подпространство  $\text{Ker} H_{k\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H_{k\epsilon} x = 0\}$  и ортогональное дополнение к нему соответственно.

Теперь функция  $f(x)$  в окрестности точки  $x^k$  приближается функцией [3]

$$f_k(x) = f_k(u_1, u_2) = f(x^k) + (P_k^\perp g^k, u_1) + (P_k g^k, u_2) +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} H_{k\epsilon} \left[ (u_1)^2 \right] + \frac{1}{2} E_k \left[ (u_2)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} f^{(3)}(x^k) \left[ u_1, (u_2)^2 \right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(x^k) \left[ (u_2)^3 \right] + \\ & + \frac{1}{24} f^{(4)}(x^k) \left[ (u_2)^4 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

которая получается из разложения в ряд Тейлора до четвертого порядка, с учетом того, что:  $x - x^k = u_1 + u_2$ ,  $u_1 = P_k^\perp (x - x^k)$ ,  $u_2 = P_k (x - x^k)$ ,  $H_{k\epsilon} u_2 = 0$ ,  $E_k u_1 = 0$ .

Тогда векторы  $u_1^k, u_2^k$  определяются как точка минимума функции  $f_k(u_1, u_2)$ , т. е. из системы уравнений:

$$\frac{\partial f_k(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial f_k(u_1, u_2)}{\partial u_2} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что система (4) является линейной по  $u_1$  и кубической по  $u_2$  и поэтому может быть несколько упрощена. Ее можно решить численно, например, методом Ньютона.

Как видно, основная трудность при реализации описанного метода состоит в вычислении производных функции  $f(x)$  и решении системы (4). Отметим, что 3-я и 4-я производные в приближении (3) используются только, если  $r_k < n$ . Если же  $r_k = n$ , то  $u_2 = 0$  и описанный метод превращается в метод Ньютона.

### Список литературы

1. Белаиш К.Н. Методы решения вырожденных задач / К.Н. Белаиш, А.А. Третьяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, № 7. – С. 1097-1102.
2. Мелешко В.И. Факторизации и псевдообращения вырожденных возмущенных законоопределенных матриц / В.И. Мелешко, В.М. Задачин // Известия вузов. Математика. – 1987. – № 11. – С. 42-50.
3. Задачин В.М. Необходимые и достаточные условия минимума смешанного порядка / В.М. Задачин // Український математичний журнал. – 1989. – Т. 41, № 3. – С. 415-419.