

УДК 006.91.001:53.088.2

С.В. Водотыка, И.П. Захаров

Харьковский национальный университет радиотехники, Харьков

## УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ КВАНТОВАНИЯ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Рассмотрены особенности оценивания неопределенности измерений результатов многократных наблюдений с учетом погрешности квантования средств измерительной техники. Рассмотрены случаи однократных и многократных наблюдений. На основе проведенного численного эксперимента предложены методики оценивания стандартной неопределенности типа  $A$  с учетом погрешности квантования.

**Ключевые слова:** погрешность квантования, неопределенность измерений, измерения с многократными наблюдениями.

### Введение

**Постановка задачи.** Результатом наблюдения измеряемой величины с помощью средства измерительной техники (СИТ) является отсчет. При измерении с помощью цифровых СИТ, при получении отсчета осуществляется преобразование измеряемой величины  $X$ , в общем случае выражаемой числом в виде бесконечной десятичной дроби, в значение отсчета  $X_N$ , выражаемое числом с ограниченным количеством десятичных разрядов  $N$ . Если единица младшего разряда в отсчете (цена деления шкалы) равна  $q$ , то справедливо выражение

$$X_N = \begin{cases} q \operatorname{ent}(X/q), & \text{при окр. к меньшему разряду;} \\ q \operatorname{ent}(X/q + 1), & \text{при окр. к большему разряду;} \\ q \operatorname{ent}(X/q + 0,5), & \text{при окр. к ближайшему разряду.} \end{cases}$$

Таким образом, при отсчете в результат измерения закладывается погрешность квантования по уровню  $\Delta_0$ , которую можно записать как

$$\Delta_0 = X_N - X.$$

Причиной возникновения погрешности квантования является использование при измерении принципа шкалирования. Именно поэтому погрешность квантования часто относят к методической погрешности, хотя она, в соответствии с определением инструментальной погрешности [1], обусловлена погрешностью примененного средства измерения".

Характер изменения погрешности квантования соответствует характеру изменения измеряемой величины. При неизменной измеряемой величины (в том числе и при отсутствии случайной погрешности на выходе СИТ) отсчет неизменен и погрешность квантования постоянна. Этим случаем, как правило, и ограничиваются при оценивании неопределенности квантования в литературе [2]. При наличии случайной погрешности в измеряемой величине погрешность квантования изменяться случайным образом, что и определяет способы оценивания ее не-

определенности и ее уменьшение.

**Целью** настоящей статьи является исследование неопределенности квантования при наличии случайной погрешности в результате измерения.

### Результаты исследований

**Неопределенность квантования при однократных измерениях.** При отсчете по шкале цифрового прибора правило округления заложено в принцип действия прибора. Если измеренная величина  $X$ , которая находится между двумя уровнями квантования  $X_N$  и  $X_{N+1}$ , отражается нижним числовым значением  $X_N$  (округление к меньшему разряду), то погрешность квантования всегда отрицательна. Если положение измеряемой величины на шкале прибора рассматривать как равновероятное, то погрешности квантования можно приписать равномерный закон распределения с математическим ожиданием равным  $-q/2$  и границами  $[-q; 0]$ . Если измеренная величина отражается верхним числовым значением  $X_{N+1}$  (округление к большему разряду), то погрешность квантования всегда положительна, ее математическое ожидание равно  $q/2$ , а границы  $[0; q]$ . Если же измеренная величина отражается ближним числовым разрядом (округление к ближайшему разряду), либо  $X_N$ , либо  $X_{N+1}$ , то математическое ожидание погрешности квантования равно 0, а границы  $[-q/2; q/2]$ . В любом из этих случаев стандартная неопределенность, связанная с погрешностью квантования, определяется выражением:

$$u(\Delta_0) = q/2\sqrt{3}. \quad (1)$$

**Неопределенность квантования при многократных измерениях.** Наличие существенной случайной погрешности при измерениях приводит к изменению значений отсчетов. В этом случае результат измерения принимают среднее арифметическое  $\bar{x}$  полученных  $n$  отсчетов  $x_i$ , а стандартная неопределенность оценивается по типу  $A$  по известной формуле:

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (2)$$

Однако при обработке результатов измерений, содержащих погрешности квантования, следует иметь в виду следующие обстоятельства, отмеченные в [3]: “Во-первых, применение методов математической статистики к обработке результатов измерений правомерно лишь в предположении о *независимости* между собой отдельных получаемых отсчетов. Во-вторых, большинство приводимых далее формул теории вероятности правомерно только для *непрерывных* распределений, в то время как распределение погрешностей вследствие неизбежного квантования отсчетов, строго говоря, всегда дискретны. Таким образом, условия непрерывности и независимости для случайных погрешностей соблюдаются лишь приближенно, а иногда могут и не соблюдаться”.

В настоящее время в нормативной литературе существует два подхода к объединению стандартных неопределенностей, связанных с квантованием измеряемой величины  $u(\Delta_0)$  и с рассеиванием результатов измерений (случайной погрешностью)  $u_A$ . Первый подход описан в «Руководстве по выражению неопределенностей в измерениях» [4] и заключается в применении правила суммирования дисперсий:

$$u_\Sigma = \sqrt{u^2(\Delta_0) + u_A^2}, \quad (3)$$

где  $u(\Delta_0)$ ,  $u_A$  вычисляются по (1) и (2) соответственно.

Второй подход приведен в ISO 14253-2:1999 [5], который предлагает использовать большее из двух значений этих стандартных неопределенностей:

$$u_\Sigma = \max(u(\Delta_0), u_A). \quad (4)$$

В статье [6] проанализированы недостатки этих подходов, основным из которых является переоценка совместной неопределенности  $u_\Sigma(x)$ . Там же предложен подход для вычисления совместной неопределенности, позволяющий избежать переоценки:

- если  $S(x_i) \leq 0,6q$ :

$$u_\Sigma = \sqrt{\left(\frac{0,5q - \bar{x}_0}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{(\max[u(\Delta_0), S(x_i)])^2}{n}}, \quad (5)$$

- если  $S(x_i) > 0,6q$ :  $u_\Sigma(x) = u_A$ ,

где  $S(x_i)$  - оценка СКО результатов отдельных отсчетов;  $\bar{x}_0$  - остаток, вычисляемый как

$$\bar{x}_0 = \begin{cases} \text{Frac}(x/(Nq)), & \text{при окр. к меньшему разряду;} \\ \text{Frac}(x/(Nq) + 1), & \text{при окр. к большему разряду;} \\ \text{Frac}(x/(Nq) + 0.5), & \text{при окр. к ближайшему разряду,} \end{cases}$$

где  $\text{Frac}()$  - операция взятия дробной части числа.

Однако применение этого подхода возможно лишь при большом числе наблюдений ( $n > 30$ ), когда случайным рассеиванием  $\bar{x}_0$  можно пренебречь.

Ввиду отмеченных обстоятельств и существования разных подходов, для проведения численного исследования совместной неопределенности, обусловленной погрешностью квантования и случайной погрешностью, был поставлен численный эксперимент.

**Постановка и результаты численного эксперимента.** При реализации численного эксперимента использовался метод Монте-Карло (ММК) [7]:

1. Генерировался массив данных  $x_{ij}$ , где  $i = 1 \dots n$ ,  $j = 1 \dots m$ , распределенных по нормальному закону с заданными СКО  $\sigma_x$  и математическим ожиданием  $\mu_x$ . Здесь  $m = 10^4$  - размер массива,  $n = 2 \dots 30$ .

2. Производилось округление полученных чисел до целых.

3. Для каждой  $j$ -й реализации округленных чисел вычислялись:

- совместная неопределенность по исследуемому правилу:  $u_{\Sigma j}$ ;

- средние арифметические:  $\bar{x}_j$ ;

- оценки СКО отдельных наблюдений:  $S_j(x_i)$ ;

- расширенные неопределенности:

$$U_j = t(v_{\text{eff}}) \cdot u_{\Sigma j}, \quad (6)$$

где  $t(v_{\text{eff}})$  - коэффициент охвата для эффективного числа степеней свободы, вычисляемых согласно формуле Велча-Саттерсвейта:

$$v_{\text{eff}} = (n-1) \left[ u_\Sigma / u_A \right]^4. \quad (7)$$

4. Для всех  $m$  вычислялись:

- доверительная вероятность:

$$P = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \rho_i,$$

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & \mu_x \in [\bar{x}_j - U_j; \bar{x}_j + U_j], \\ 0, & \mu_x < \bar{x}_j - U_j \cup \mu_x > \bar{x}_j + U_j. \end{cases}$$

- среднее арифметическое  $\bar{x}$  среди  $m$  средних арифметических  $\bar{x}_j$ ,

- среднее смещений  $\bar{\Delta}_0 = \bar{x} - \mu_x$ .

5. Вычислялась «истинное» СКО  $\bar{x}_j$ :

$$S(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2},$$

6. Изменяя  $\mu_x$  от -0,5 до 0,5,  $\sigma_x$  от 0 до 1 и по вторяя шаги 1-5, строим зависимости  $P$  от  $\mu_x$  и  $\sigma_x$

для каждого подхода, а также зависимости «истинных параметров»  $\Delta_0$ ,  $S(\bar{x}_j)$  от  $\mu_x$  и  $\sigma_x$ .

**Критерий достоверности исследуемых подходов.** Поверхность  $P(\mu_x, \sigma_x)$  несет информацию о том, в каком проценте случаев будет наблюдаться переоценка и недооценка совместной неопределенности. Для получения процентных соотношений случаев переоценки и недооценки необходимо поверхность  $P(\mu_x, \sigma_x)$  разделить на две части: выше и ниже уровня 0,95 по оси  $P$  (так как численный эксперимент проводился для доверительной вероятности  $P = 0,95$ ). Однако абсолютная погрешность вычисления  $P$  с помощью представленного численного эксперимента составила 0,005, что в предположение нормального закона распределения  $P$  дает границы  $\pm 0,01$ . Поэтому вместо уровня 0,95 использовались два уровня: 0,94 и 0,96. Соответственно определялись процентные соотношения частей поверхностей, лежащих ниже уровня 0,94:  $P_{[0;0,94]}$ , между уровнями 0,94 и 0,96:  $P_{[0,94;0,96]}$ , а также выше уровня 0,96:  $P_{[0,96;1]}$ . Также вычислялась средняя доверительная вероятность  $\bar{P}$  для всей плоскости  $P(\mu_x, \sigma_x)$ . Для «идеального» подхода к вычислению совместной неопределенности значение  $P_{[0,94;0,96]}$  должно стремиться к 1, т.е. значения  $P_{[0;0,94]}$  и  $P_{[0,96;1]}$  должны стремиться к 0, а значение  $\bar{P}$  должно быть равным 0,95.

**Анализ достоверности существующих подходов.** Анализ подходов (3) и (4) к вычислению совместной неопределенности показал, что с увеличением числа наблюдений увеличиваются значения  $P_{[0;0,94]}$  и уменьшаются  $P_{[0,96;1]}$ , т.е. увеличивается переоценка и уменьшается недооценка данной совместной неопределенности. При 2 наблюдениях в 50 % случаев для (3) (рис. 1) и 58 % для (4) происходит недооценка совместной неопределенности, которая уменьшается с ростом числа наблюдений и уже при 6 наблюдениях для этих подходов равна 0 %. Переоценка при 2 наблюдениях встречается в 44 % случаев (рис. 1), а уже при 8 наблюдениях в 100 % случаев (рис. 2).

Таким образом, использование подходов (3) и (4) для вычисления совместной неопределенности ведет и к существенной ее переоценке с ростом числа наблюдений. Также существует большой процент вероятности, что она может быть и недооценена согласно этих подходов. Такое положение вещей говорит о низкой достоверности результатов, полученных с помощью выражений (3) и (4).

Для подхода (5) переоценка встречается в 95 % (5 наблюдений) - 69 % (30 наблюдений) случаях, т.е. с ростом числа наблюдений уменьшается.

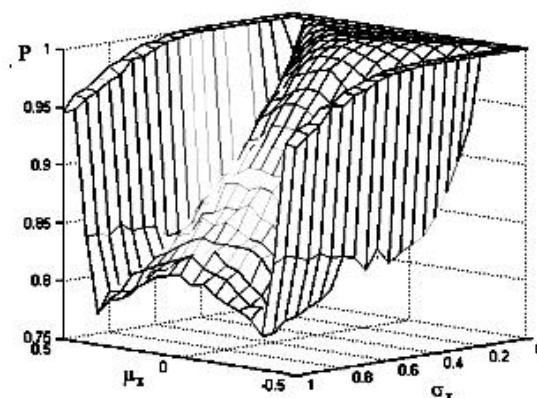


Рис. 1. Зависимость  $P(\mu_x, \sigma_x)$  для  $n = 2$ , правило (3)

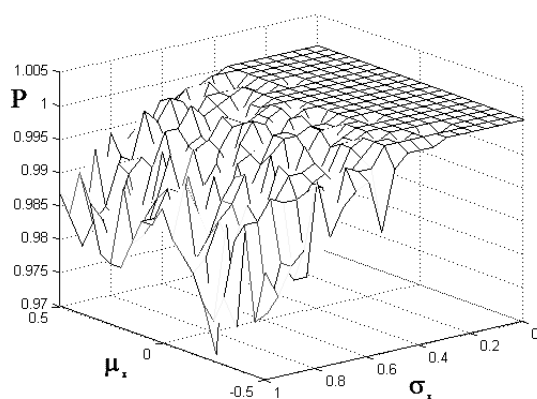


Рис.2. Зависимость  $P(\mu_x, \sigma_x)$  для  $n = 8$ , правило (3)

При этом вероятность получить недооценку составляет порядка 1-3 % для всех проанализированных чисел наблюдений. Это говорит о том, что подход (5) дает большую достоверность нежели (3) и (4). Однако при 2-6 наблюдениях вероятность  $P_{[0,94;0,96]}$  получить достоверную оценку с помощью (5) составляет 6-7 %, а для 7-30 наблюдений около 15-30 %. Такие значения вероятностей получения достоверных оценок совместной неопределенности невелики, однако их можно увеличить за счет разработанных авторами подходов.

**Аппроксимация зависимости «истинной» неопределенности квантования от оценки СКО результатов отдельных наблюдений.** Получить «истинные» зависимость  $u(\Delta_0)$  и  $u_A$  от  $S(\bar{x}_j)$  возможно с помощью усреднения точек поверхности получаемой на шаге 6 численного эксперимента по  $\mu_x$ . В результате усреднения была получена зависимость  $u(\Delta_0)$  от  $S(\bar{x}_j)$  (рис. 3), которая хорошо аппроксимировалась с помощью выражения:

$$u(\Delta_0) = \frac{q}{\sqrt{12}} e^{-30S^3(\bar{x}_j)}. \quad (8)$$

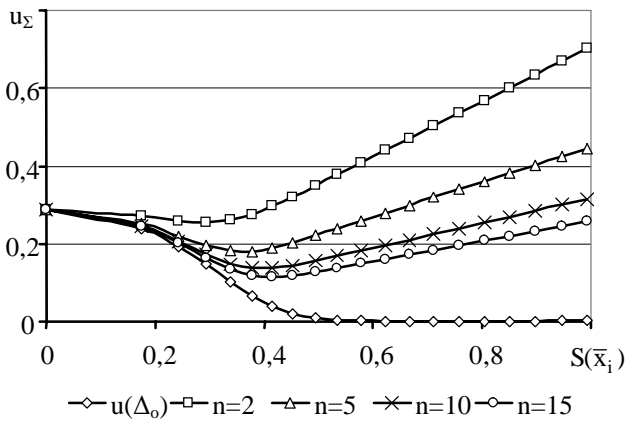


Рис. 3. Зависимости  $u(\Delta_0)$  и  $u_\Sigma$  от  $S(\bar{x}_j)$

На этом же графике приведены зависимости  $u_\Sigma$  от  $S(\bar{x}_j)$  для разных значений  $n$ , которые были получены по формуле:

$$u_\Sigma = \sqrt{u^2(\Delta_0) + S^2(\bar{x}_j)/n}$$

Таким образом, окончательное выражение для оценивания совместной неопределенности будет иметь вид:

$$u_\Sigma = \sqrt{\frac{q^2}{12} e^{-60\sqrt{n}^3 u_A^3} + u_A^2}, \quad (9)$$

причем при  $u_A = 0$

$$u_\Sigma = \frac{q}{\sqrt{12}},$$

а при  $u_A \geq 0,4\sqrt{n}$

$$u_\Sigma = u_A.$$

Для оценивания расширенной неопределенности можно рассчитать эффективное число степеней свободы для  $u_\Sigma$  по выражению (7), которое будет изменяться от  $(n-1)$  (при  $u_A \geq 0,4\sqrt{n}$ ) до  $\infty$  (при  $u_A = 0$ ).

Вероятность  $P_{[0,94;0,96]}$  получить достоверную оценку с помощью (9) составляет 23-34% для 7-10 наблюдений, при этом вероятность  $P_{[0;0,94]}$  получить недооценку составляет 20-27%, а среднее значение этой вероятности составляет  $\bar{P}_{[0;0,94]} = 0.93$ , что говорит о более высокой достоверности получаемых результатов с помощью (9), чем с помощью (5).

При  $n < 7$  среднее значение доверительной вероятности для недооценки составляет  $\bar{P}_{[0;0,94]} = 0.91$ , а вероятность ее получения порядка 20%, т.е. достоверность полученных результатов с помощью (9) ниже, чем с помощью (5). При  $n > 10$  значение  $\bar{P}_{[0;0,94]}$  существенно уменьшается с рос-

том числа наблюдений, а вероятность ее получения остается неизменной на уровне 13%, что сказывается на уменьшении достоверности результатов, полученных с помощью (9).

Для того, чтобы устранить описанные недостатки выражения (9), был разработан еще один подход для оценивания совместной неопределенности  $u_\Sigma$ .

**Применение взвешенной оценки совместной неопределенности.** Данный подход основан на анализе зависимостей вероятностей попадания математических ожиданий в интервалы, вычисляемые с помощью (1) и (2), от  $\mu_x$  и  $\sigma_x$ , т.е. при построении плоскости  $P(\mu_x, \sigma_x)$  в выражение (6) совместная неопределенность вычислялась либо с помощью неопределенности квантования:  $u_\Sigma(x) = u(\Delta_0)$ , либо с помощью неопределенности по типу А:  $u_\Sigma(x) = u_A$  (рис. 4).

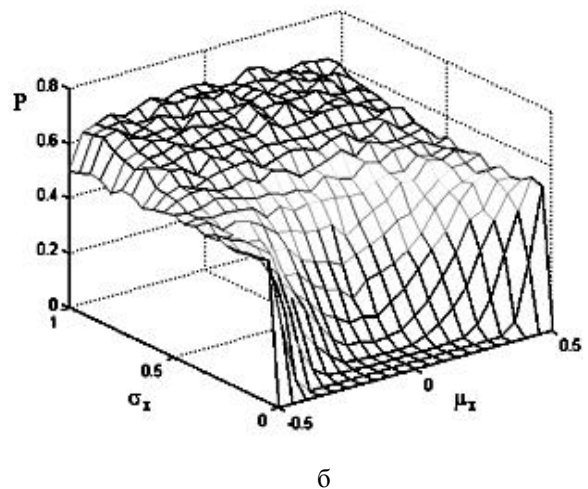
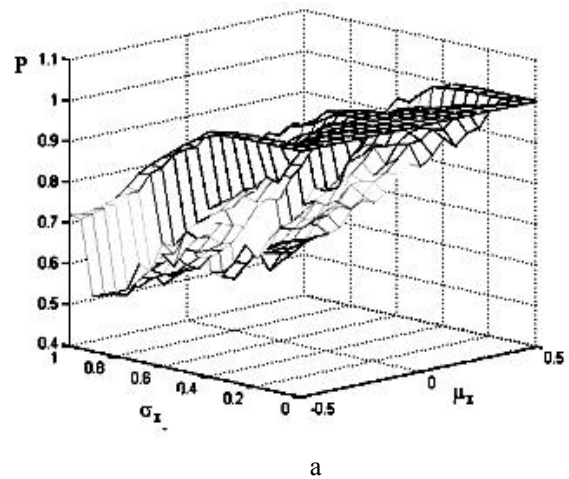


Рис. 4. Зависимость вероятности попадания математического ожидания в интервал, а – вычисленный с помощью (1), б – вычисленный с помощью (2) для  $n = 2$

Как видно из рис.4 вычисленная доверительная вероятность для выражения (1) максимальна там,

где соответствующая доверительная вероятность для выражения (2) минимальна. Это привело к предположению, что существует некоторая комбинация между  $u(\Delta_0)$  и  $u_A$ , аппроксимирующая идеальную зависимость  $P(\mu_x, \sigma_x)$ .

Исходя из этого, было предложено использовать следующее правило для нахождения совместной неопределенности, связанной с погрешностью отсчета и случайной погрешностью:

$$u_{\Sigma}(x) = t_1 \cdot u(\Delta_0) + t_2 \cdot u_A, \quad (10)$$

где  $t_1, t_2$  - весовые коэффициенты.

Весовые коэффициенты определялись итеративным методом. Вычислялась зависимость части плоскости  $P_{[0,94;0,96]}$  от коэффициентов  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 5), после чего выбирались такие коэффициенты, для которых  $P > 0.90, \forall \mu_x, \sigma_x$  (т.е. плоскость доверительной вероятности лежит выше уровня 0.90) и часть плоскости  $P_{[0;0,94]}$  должна быть максимальной.

Результаты расчетов  $t_1$  и  $t_2$  представлены на рис. 6.

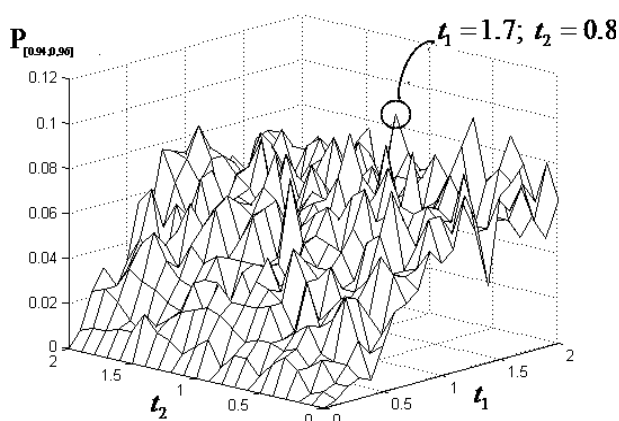


Рис. 5. Зависимость  $P_{[0,94;0,96]}$  от весовых коэффициентов  $t_1$  и  $t_2$  для  $n = 2$

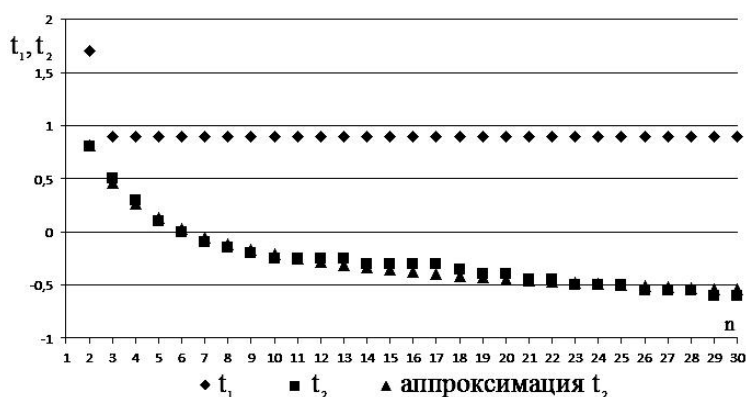


Рис. 6. Вычисленные значения весовых коэффициентов

Анализ полученных результатов показал, что можно получить аппроксимации зависимости  $t_2$  от  $n$  на интервале  $n \in \{3;30\}$ , на котором  $t_1 = \text{const}$ , и при этом не ухудшить оценку совместной неопределенности. Такая зависимость была получена с помощью метода наименьших квадратов:

$$t_2 = 55,14 - 56,1 \cdot e^{\frac{-0,04658}{\sqrt{n}}}. \quad (11)$$

С учетом (1) и (11) выражение при  $n \in \{3;30\}$  можно переписать:

$$u_{\Sigma}(x) = 0,9 \cdot \frac{q}{2\sqrt{3}} + \left( 55,14 - 56,1 \cdot e^{\frac{-0,04658}{\sqrt{n}}} \right) u_A.$$

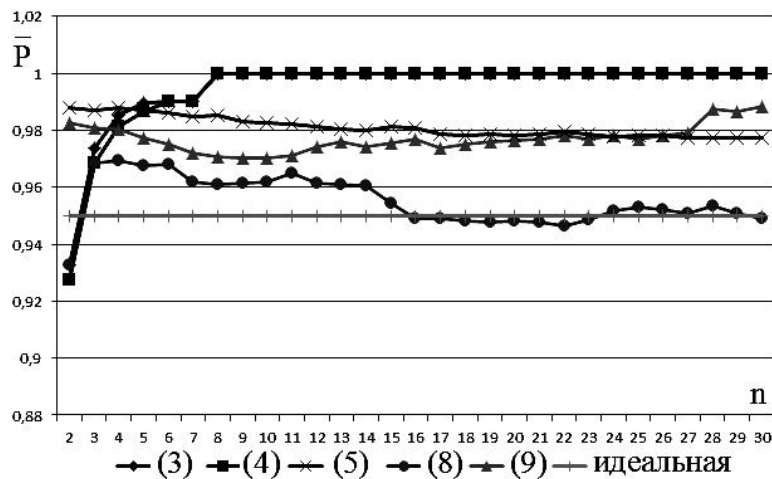
Таким образом, получилось правило вычисления совместной неопределенности, согласно которому вся плоскость доверительной вероятности лежит выше уровня 0.9.

Преимуществом такого подхода является то, что при 2-6 наблюдениях часть плоскости  $P_{[0,94;0,96]}$  является максимальной среди всех проанализированных подходов и при этом вероятность получения недооценки составляет 3-15 %, среднее значение доверительной вероятности для которой равно  $\bar{P}_{[0;0,94]} = 0.93$ . Это говорит о том, что достоверность результатов, полученных с помощью выражения (10) при  $n \in \{2;6\}$  максимальна среди всех подходов.

Для всех проанализированных выражений были построены зависимости вычисленной средней доверительной вероятности  $\bar{P}$  от числа наблюдений (рис. 7), которые также подтверждают то, что достоверность результатов, полученных с помощью разработанных выражений выше, чем у результатов, полученных с помощью существующих подходов.

### Выводы

В статье исследовано влияние погрешности квантования на результат измерения и его суммарную неопределенность при числе наблюдений от 2 до 30. Получены выражение для оценивания совместной неопределенности квантования при получении результата измерения на основании многократных наблюдений. По результатам численного эксперимента можно сделать вывод, что при  $n \in \{2;6\}$  лучше всего использовать выражение (10), при  $n \in \{6;10\}$  рекомендуется использовать выражение (9), а при  $n \in \{11;30\}$  лучше всего зарекомендовали себя выражения (5).

Рис. 7. Зависимость  $\bar{P}$  от  $n$ 

Дополнительным преимуществом полученных выражений является то, что их применение не вызывает вычислительной трудности в отличие от выражений, представленных в [8].

### Список литературы

1. РМГ 29-99.ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. – Минск: ИПК Издательство стандартов, 2000. – 32 с.
2. Захаров И.П. Теория неопределенности в измерениях / И.П. Захаров. – Х.: Консум, 2002. – 256 с.
3. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1991. – 304 с.
4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements [Text]. - Geneva: ISO, First Edition, 1995. - 101 p.
5. ISO 14253-2:1999. Geometrical Product Specifications (GPS) - Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment -- Part 2: Guide to the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring equipment and in product verification.

6. Phillips S.D. Uncertainty Due to Finite Resolution Measurements / S.D. Phillips, B. Toman, W.T. Elster // Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology. – 2008. – V. 113, N. 3. – P. 143 – 156.

7. Захаров И.П. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях [Текст] / И.П. Захаров, С.В. Водотыка // Системы обработки информации, 2008. – № 4 (71). – С. 34 – 37.

8. Elster C. Evaluation of Measurement Uncertainty in the Presence of Combined Random and Analogue to Digital Conversion Errors / C. Elster // Measurement Science and Technology. – 2000. – № 11. – P. 1359 – 1363.

Поступила в редколлегию 13.10.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### ОБЛІК ПОХИБКИ КВАНТУВАННЯ ПІД ЧАС ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ З БАГАТОРАЗОВИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ

С.В. Водотыка, І.П. Захаров

Розглянуто особливості оцінювання невизначеності результатів багаторазових спостережень з урахуванням похибки відліку засобів вимірювальної техніки. Розглянуто випадки одноразових і багаторазових вимірювань. На основі проведеного чисельного експерименту запропоновані методи оцінювання стандартної невизначеності типу А з урахуванням похибки квантування.

**Ключові слова:** похибка квантування, невизначеність вимірювань, вимірювання з багаторазовими спостереженнями.

### ACCOUNTING ERROR DUE TO FINITE RESOLUTION DURING MEASUREMENT UNCERTAINTY ESTIMATING WITH MULTIPLE OBSERVATIONS

S.V. Vodotyka, I.P. Zakharov

The features of measurement uncertainty evaluation of multiple observations results taking into account the error due to finite resolution of measuring instrument are observed. The cases of single and multiple observation are analyzed. On the base of the conducted analysis the equations for type A measurement uncertainty evaluation with multiple observations in presence of uncertainty due to finite resolution are proposed.

**Keywords:** error due to finite resolution, measurement uncertainty, measurement with multiple observations.