УДК 006.91.001

С.В. Водотыка, И.П. Захаров, Е.А. Климова, Н.С. Шевченко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

МОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ: СЛУЧАИ, НЕ РАССМОТРЕННЫЕ В GUM

Рассмотрено оценивание неопределенности измерений для величин, выраженных в децибелах, приведены результаты расчета коэффициентов охвата для дробного числа степеней свободы, проведен учет квантования при оценивании неопределенности измерений с многократными наблюдениями, проведено оценивание расширенной неопределенности для коррелированных входных величин без использования эффективного числа степеней свободы.

Ключевые слова: *стандартная неопределенность, расширенная неопределенность, число степеней свободы.*

Введение

Руководство по выражению неопределенности измерений (GUM) [1] разрабатывалось как документ, дающий единый подход к оцениванию точности измерений. Как любой нормативный документ, претендующий на универсальность, он содержит большое число «белых пятен», вызывающих постоянные вопросы и претензии пользователей. Попытками устранить недостатки, являются Приложения к GUM, издаваемые Рабочей Группой №1 Объединенного Комитета по Руководствам в Метрологии (JCGM) [2, 3]. Однако эти приложения, издаваемые достаточно неспешно, не успевают отвечать на все вопросы пользователей GUM.

В статье рассматриваются некоторые случаи, не описанные в GUM, с которыми столкнулись авторы: оценивание неопределенности измерений для величин, выраженных в децибелах, расчет коэффициента охвата для дробного числа степеней свободы, оценивание неопределенности, связанной с квантованием измеряемой величины по уровню, оценивание расширенной неопределенности для коррелированных входных величин, когда применение формулы Велча-Саттерсвейта для определения эффективного числа степеней свободы невозможно.

Основной материал

1. Оценивание неопределенности измерений для величин, выраженных в децибелах. В практике электрических, акустических, оптических и других видов измерений широкое распространение получила безразмерная единица − децибел. Удобство применения этой единицы измерения связано со свойствами логарифма: использование операций сложения и умножения вместо, соответственно, операций умножения и возведения в степень, а так же существенное уменьшение диапазона числовых значений величин, выраженных в децибелах, при работе в широком диапазоне исходных величин.

Значения исходной величины Y связаны со значениями величины, выраженной в децибелах X нелинейной (показательной) зависимостью:

$$Y = Y_0 \cdot 10^{\frac{X}{M}}, \qquad (1)$$

где Y_0 − исходный (опорный) уровень, выраженный в абсолютных единицах; M – коэффициент, равный 10 в случае измерения энергетических величин, и 20 − в случае измерения силовых величин.

Исходя из этой формулы, можно записать выражения для пересчета оценки измеряемой величины $\bar{X}$ при многократных измерениях, стандартных неопределенностей типа A $u_A(\bar{X})$ и B $u_B(X)$, а также суммарной стандартной $u_c(X)$ и расширенной неопределенности $U(X)$ в соответствующие параметры относительно исходной величины Y, в следующем виде [4]:

$$\bar{Y}^* = Y_0 \cdot 10^{\frac{\bar{X}}{M}}; \qquad (2)$$

$$u_A(\bar{Y}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{Y}^* u_A(\bar{X}); \qquad (3)$$

$$u_B(\bar{Y}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{Y}^* u_B(\bar{X}); \qquad (4)$$

$$u_c(\bar{Y}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{Y}^* u_c(\bar{X}); \qquad (5)$$

$$U(\bar{Y}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{Y}^* U(\bar{X}). \qquad (6)$$

При выводе этих формул использовалось разложение в ряд Тейлора, ограниченное членом первой степени. Поэтому существует необходимость анализа погрешности оценивания неопределенности, возникающей в результате линеаризации. Расчет погрешности произведен методом Монте-Карло (ММК). Для этого осуществлено генерирование массива случайных чисел с заданным СКО и математическим ожиданием и нормальным законом распределения объемом не менее 10^5.

Относительные погрешности линеаризации для среднего арифметического $\delta\bar{Y}$, неопределенности типа А $\delta u_A(\bar{Y})$ и В $\delta u_B(\bar{Y})$ оценивались по формулам:

$$\delta\bar{Y} = \frac{\bar{Y}^* - \bar{Y}}{\bar{Y}}; \tag{7}$$

$$\delta u_A(\bar{Y}) = \frac{u_A{}^*(\bar{Y}) - u_A(\bar{Y})}{u_A(\bar{Y})}; \tag{8}$$

$$\delta u_B(\bar{Y}) = \frac{u_B{}^*(\bar{Y}) - u_B(\bar{Y})}{u_B(\bar{Y})}, \tag{9}$$

где $\bar{Y}$, $u_A(\bar{Y})$ и $u_B(\bar{Y})$ − действительные значение соответственно среднего арифметического измеряемой величины, неопределенности типа *А* и неопределенности типа *В*.

В результате вычислений был получен следующие результаты.

1. Процедура вычисления среднего арифметического входных величин, выраженных в децибелах с последующим пересчетом в оценку измеряемой величины, дает, из-за наличия связывающей их нелинейной зависимости, смещенную оценку измеряемой величины. Это смещение не будет превышать 10% при значениях СКО случайной погрешности не более 2 дБ для энергетических величин и 4 дБ для силовых величин.

2. Относительная погрешность оценивания стандартной неопределенности измерения типа *А* не будет превышать 15% при значениях стандартной неопределенности типа *А* величины, выраженной в децибелах не более 1,8 дБ для энергетических величин и 3,6 дБ для силовых величин.

3. Относительная погрешность оценивания стандартной неопределенности измерения типа *В* не будет превышать 15 % при значениях стандартной неопределенности типа *В* величины, выраженной в децибелах не более 2,8 дБ для энергетических величин и 5,6 дБ для силовых величин.

2. Расчет коэффициента охвата для дробного числа степеней свободы. В соответствии с базовым алгоритмом оценивания неопределенности измерений [1], расширенная неопределенность результата измерения определяется как произведение суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата. При наличии повторных наблюдений этот коэффициент рассчитывается как коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 для так называемого эффективного числа степеней свободы ν_{eff}. Последнее определяется по формуле Велча-Саттерсвейта и, в общем случае, представляет собой дробное число. В п. G.6.4 «Руководства по выражению неопределенности измерений» рекомендуют «уменьшать полученное значение ν_{eff} до ближайшего целого числа или интерполировать». В том случае, когда получаемое значение ν_{eff} − мало, погрешность определения коэффициента Стьюдента при его округлении может составлять существенное значение. Например, для ν_{eff}, лежащего в диапазоне от 1 до 2, что часто бывает при выполнении двух параллельных аналитических измерений, коэффициент охвата изменяется в 3 раза (от 12,7 до 4, 3).

Авторами была поставлена цель получить значения коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы и аппроксимация зависимости $t_{0,95}(\nu)$ аналитическим выражением с приемлемой точностью.

В основе расчета лежит операция численного интегрирования. Значение коэффициента Стьюдента $t_p(\nu)$ для заданной вероятности p и числа степеней свободы ν, находится из равенства:

$$\int_0^{t_p(\nu)} p(t,\nu)dt = \frac{p}{2}, \tag{10}$$

где
$$p(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} - \tag{11}$$

плотность вероятности распределения Стьюдента.

Для уменьшения времени вычисления был применен итерационный алгоритм.

В табл. 1 приведены рассчитанные значения коэффициента Стьюдента для p = 0,95 для числа степеней свободы от 1 до 3 с шагом 0,1 [5].

Таблица 1

Рассчитанные значения коэффициента Стьюдента

ν	$t_{0,95}(\nu)$	ν	$t_{0,95}(\nu)$
1,0	**12,706**	**2,0**	**4,303**
1,1	10,277	2,1	4,112
1,2	8,649	2,2	3,949
1,3	7,501	2,3	3,807
1,4	6,657	2,4	3,684
1,5	6,017	2,5	3,575
1,6	5,517	2,6	3,478
1,7	5,119	2,7	3,392
1,8	4,795	2,8	3,315
1,9	4,527	2,9	3,245
2,0	**4,303**	**3,0**	**3,182**

Для вероятности охвата 0,95 получено аналитическое выражение, аппроксимирующее значение коэффициента Стьюдента в диапазоне от 2,37 до 12,7 (что соответствует изменению числа степеней свободы от 7 до 1):

$$t_{0,95}(\nu) = \frac{2,348551}{1 - 1,45153 \cdot \exp(-0,576295 \cdot \nu)}. \quad (12)$$

Относительная погрешность аппроксимации в этом диапазоне не превышает ± 2 %.

3. Учет квантования при оценивание неопределенности измерений с многократными наблюдениями. В GUM описан подход к объединению стандартных неопределенностей, связанных с квантованием измеряемой величины $u(\Delta_o)$ и с рассеиванием результатов измерений (случайной погрешностью) u_A, основанный на применении правила суммирования дисперсий:

$$u_\Sigma = \sqrt{u^2(\Delta_o) + u_A^2}, \quad (13)$$

где $u(\Delta_o)$, u_A вычисляются, соответственно по формулам:

$$u(\Delta_o) = q/2\sqrt{3}, \quad (14)$$

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (15)$$

Здесь q − единица младшего разряда в отсчете x_i; n − число проведенных многократных измерений.

Для проведения численного исследование совместной неопределенности, обусловленной погрешностью квантования и случайной погрешностью, был поставлен численный эксперимент [6], который реализовывался на базе ММК:

1). Генерировался массив данных x_{ij}, где $i = 1...n$, $j = 1...m$, распределенных по нормальному закону с заданными СКО σ_x и математическим ожиданием μ_x. Здесь $m = 10^4$ − размер массива, $n = 2...30$.

2). Производилось округление полученных чисел до целых.

3). Для каждой j-й реализации округленных чисел вычислялись:

– совместная неопределенность по исследуемому правилу: $u_{\Sigma j}$;

– средние арифметические: $\bar{x}_j$;

– оценки СКО отдельных наблюдений: $S_j(x_i)$;

– расширенные неопределенности:

$$U_j = t(\nu_{eff}) \cdot u_{\Sigma j}, \quad (16)$$

где $t(\nu_{eff})$ – коэффициент охвата для эффективного числа степеней свободы, вычисляемых согласно формуле Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_{eff} = (n-1)\left[u_\Sigma / u_A\right]^4.$$

4). Для всех m вычислялись:

– среднее арифметическое $\bar{x}$ среди m средних арифметических $\bar{x}_j$,

– среднее смещений $\bar{\Delta}_o = \bar{x} - \mu_x$.

5). Вычислялась «истинное» СКО $\bar{x}_j$:

$$S(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_j - \bar{x})^2}. \quad (17)$$

6). Изменяя μ_x от –0,5 до 0,5, σ_x от 0 до 1 и повторяя шаги 1-5, строилась зависимость «истинных» параметров $\bar{\Delta}_o$, $S(\bar{x}_j)$ от μ_x и σ_x.

Результаты вычислений представлены на рисунке.

Из рис. 1 видно, что оценка совместной стандартная неопределенности, вычисляемая по GUM является завышенной.

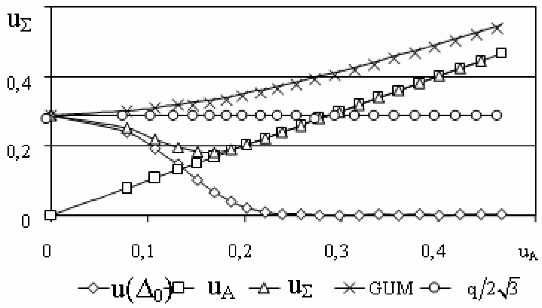

Рис. 1. Исследование неопределенности, связанной с квантованием измеряемой величины для $n = 5$

Аппроксимация «истинных» значений неопределенности дало следующее выражение для оценивания совместной неопределенности:

$$u_\Sigma = \sqrt{\frac{q^2}{12} e^{-60\sqrt[2]{n^3}u_A^3} + u_A^2}. \quad (18)$$

Для оценивания расширенной неопределенности можно рассчитать эффективное число степеней свободы для u_Σ по выражению

$$\nu_{eff} = (n-1)\left[u_\Sigma / u_A\right]^4, \quad (19)$$

которое будет изменяться от $(n-1)$ (при $u_A \geq 0,4\sqrt{n}$) до ∞ (при $u_A = 0$).

4. Оценивание расширенной неопределенности для коррелированных входных величин. В работе [7] показано, что при наличии результатов n измерений двух коррелированных входных величин, коэффициент охвата их композиции не зависит от коэффициента корреляции и выражается коэффициентом Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$.

Использование же формулы Велча-Саттерсвейта в случае наличия корреляции будет давать следующие значения эффективных степеней свободы:

$$\nu_{eff} = \frac{(n-1)\left(u_1^2 + u_2^2 + 2r_{1,2}u_1u_2\right)^2}{\left(u_1^4 + u_2^4\right)} . \qquad (20)$$

Анализ этого выражения показывает, что относительная погрешность оценивания числа степеней свободы при изменении коэффициента корреляции от –1 до 1 изменяется от –100 до 130%. При положительных коэффициента корреляции это приводит к соответствующему уменьшению коэффициента охвата, а при отрицательных – к его увеличению (вплоть до бесконечности).

Поэтому при наличии корреляции между входными величинами, расширенную неопределенность типа *A* целесообразно оценивать через закон распространения расширенной неопределенности:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} U_{Ai}^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} r_{ij}U_{Ai}U_{Aj}} , \qquad (21)$$

где U_{Ai}, U_{Aj} – расширенная неопределенность типа А вкладов i-й и j-й входных величин.

Можно показать, что это выражение следует из метода редукции [8] и является обобщением на случай коррелированных входных величин способа оценивания расширенной неопределенности, предложенного в стандарте [9].

Список литературы

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.

2. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" − Propagation of distributions using a Monte Carlo method. − BIPM, First edition 2008. − 88 p.

3. JCGM 104:2008. Uncertainty of measurement. Part 1: Introduction to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUIDE-98). ISO/IEC, 2008 – 28 p.4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements [Text]. – Geneva: ISO, First Edition, 1995. - 101 p.

4. Захаров И.П. Особенности оценивания неопределенности измерений при выражении входных величин в децибелах / И.П. Захаров, Н.С. Шевченко // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2009. – Вип. 5 (79). – С. 29-33.

5. Захаров И.П. Расчет значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы / И.П. Захаров, Е.А. Климова // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2010. – Вип. 4 (85). – С. 43-47.

6. Захаров И.П. Учет погрешности квантования при оценивании неопределенности результатов измерений с многократными наблюдениями / И.П. Захаров, С.В. Водотыка // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 8 (98). – С. 39-44.

7. Захаров И.П. Учет корреляции при оценивании неопределенности результатов многократных измерений / И.П. Захаров // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2005. – Вип. 9 (85). – С. 43-45.

8. Rabinovich S.G. Measurement errors and uncertainty: theory and practice / S.G. Rabinovich. – 3rd edn. − New York: Springer, 2005. − 308 p.

9. ISO/TS 14253-2 1999. Geometrical Product Specifications (GPS) - Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment – Part 2 Guide to the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring equipment and in product verification. ISO, 1999. − 73 p.

Поступила в редколлегию 16.01.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

МОДЕЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ: ВИПАДКИ, ЩО НЕ РОЗГЛЯНУТІ У GUM

С.В. Водотика, І.П. Захаров, К.А. Клімова, Н.С. Шевченко

Розглянуто оцінювання невизначеності вимірювань для величин, виражених в децибелах, наведено результати розрахунку коефіцієнта покриття для дробового числа ступенів свободи, проведено облік квантування під час оцінювання невизначеності вимірювань з багатократними спостереженнями проведено оцінювання розширеної невизначеності для корельованих вхідних величин без використання ефективного числа ступенів свободи.

Ключові слова: *стандартна невизначеність, розширена невизначеність, число степенів свободи.*

MODEL APPROACH TO EVALUATION OF UNCERTAINTY IN MEASUREMENT: CASES NOT CONSIDERED IN GUM

S.V. Vodotyka, I.P. Zakharov, K.A. Klimova, N.S. Shevchenko

Measurement uncertainty evaluation for the quantity expressed in decibels is considered, results of calculation of the coverage factor fractional number of degrees of freedom are resulted, measurement uncertainty evaluation due to finite resolution of measuring instrument is considered, expanded uncertainty evaluation for correlation input quantities without use of effective number of degrees of freedom is carry out.

Keywords: *standard uncertainty, expanded uncertainty, number of degrees of freedom.*