УДК 681.142

О.Ю. Редьога, Н.А. Яремчук

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна.

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ ЕКСПЕРТНОМУ ОЦІНЮВАННІ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕДІАНИ УОЛША

В статті розглянуто питання зменшення невизначеності експертного оцінювання вагових коефіцієнтів. Для досягнення поставленої задачі використано медіану Уолша. Наведено послідовність розрахунку вагових коефіцієнтів та їх розширеної невизначеності з використанням медіани та медіани середніх Уолша. З використанням порядкових статистик проведено порівняння результатів обчислення ймовірності знаходження медіани та медіани Уолша на заданому інтервалі, що демонструє більшу ефективність застосування медіани Уолша.

Ключові слова: *шкала порядку, вагові коефіцієнти, експертне оцінювання, невизначеність.*

Вступ

При побудові комплексного показника якості програмного засобу (ПЗ), який складається з часткових показників якості ПЗ використовують вагові коефіцієнти [1]. Вагові коефіцієнти вказують на вплив відповідного показника якості при побудові комплексної оцінки. Вагові коефіцієнти отримують різними шляхами, нариклад, за допомогою апріорної інформації, використовуючи один чи декілька критеріїв, або ж використовуючи експертний метод, який на даний час є найбільш розповсюдженим.

Якщо при експертному оцінюванні вагових коефіцієнтів маємо невелику кількість часткових показників якості, то можливо використати метод ранжирування показників. Але якщо таких показників багато, людські можливості не дозволяють здійснювати надійне та стабільне порівняння об’єктів [2]. В такому випадку використовують метод попарних порівнянь [3]. Результати експертного оцінювання заносять в матрицю парних порівнянь або представляють у вигляді орієнтовного графу парних порівнянь, вершинами якого є часткові показники, а дуги характеризують відношення між ними. Шкала вагових коефіцієнтів є шкалою порядку, оскільки результати експертного оцінювання вагових коефіцієнтів отримують з використанням бінарного відношення порядку [4]. Тому при оцінюванні вагових коефіцієнтів використовують адекватну статистику - медіану. Недоліком медіани, як оцінки центру розподілу, є її велика невизначеність у порівнянні з середнім арифметичним, особливо при малій кількості експертів, що приймають участь в оцінюванні. Для порівняння оцінок центру вибірки використовують таку характеристику як ефективність [5]. Ефективна оцінка – це незміщена оцінка, що має найменшу дисперсію з усіх можливих незміщених оцінок даного параметра. Ефективність для медіани дорівнює 0,64, що у порівнянні з середнім арифметичним гірше на 36%. Але медіана, як робастна оцінка має свої переваги. Вона нечутлива до аномальних результатів, викликаних неузгодженістю або некомпетентністю експертів. Дня підвищення ефективності визначення вагових коефіцієнтів і враховуючи робастність оцінювання в даній роботі запропоновано використати медіану Уолша. Для нормального закону розподілу ефективність медіани Уолша менша за ефективність середнього арифметичного лише на 4,5%.

Метою даної статті є розробка способу обчислення вагових коефіцієнтів при експертному оцінюванні з використанням медіани Уолша з метою зменшення невизначеності як оцінки точності результата експертного оцінювання.

1. Визначення вагових коефіцієнтів за експертним оцінюванням з характеристикою невизначеності

При використанні методу попарних порівнянь на основі експертних оцінок на множині параметрів ПЗ встановлюється бінарне відношення порядку. В результаті отримуємо матрицю (табл. 1).

Таблиця 1

Результати оцінювання k-го експерта

Номер вагового коефіцієнта	1	2	…	n	S_{ik}
1	–	δ_{12}		δ_{1n}	S_{1k}
2		–			S_{2k}
$\vdots$			–		$\vdots$
n				–	S_{nk}

З таблиці 1 $S_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$, де i – номер вагового коефіцієнта, $i = 1, n$; k – номер експерта, $k = 1, n_E$, (n_E – кількість експертів); δ_{ij} – значення 1 або інше за домовленістю, яке ставлять експерти при оцінюванні методом попарного порівняння. При $i = j$ у відповідних комірках проставляється прочерк.

Таблиця 2

Результати оцінювання вагового коефіцієнта групою з n_E експертів

№ експерта / № вагового коефіцієнта	1	…	k	…	n_E
1	S_{11}	…	S_{1k}	…	S_{1n_E}
2	S_{21}	…	S_{2k}	…	S_{2n_E}
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
n	S_{n1}	…	S_{nk}	…	S_{nn_E}

Результати оцінювання k-го експерта формують вектор-стовбець значень $S_{ik}, i = 1, n$, а для кожного вагового коефіцієнта за результатами n_E експертів отримуємо вектор-рядок $S_{ik}, k = 1, n_E$.

Відповідно до аналізу, проведеного в роботі [4] нормалізовані вагові коефіцієнти визначають за допомогою медіани за формулою:

$$\rho_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i} = \frac{\text{med}(S_{ik})}{\sum_{i=1}^{n} \text{med}(S_{ik})}, \text{ де } \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1.$$

Задача оцінювання невизначеності вагових коефіцієнтів в [4] вирішується двома шляхами: для кількості експертів $n_E < 10$, чи при більшій кількості. При кількості експертів $n_E > 10$, використовуючи метод непараметричного оцінювання границь довірчого інтервалу звичайної медіани, застосовують порядкові статистики S_L та S_H, що знаходяться з ранжованого ряду вектор-матриці за номерами L та H:

Для нижньої границі

$$L = E[(n_E + 1 - z_p \cdot \sqrt{n_E})/2], \quad (1)$$

для верхньої границі

$$H = E[(n_E + 1 + z_p \cdot \sqrt{n_E})/2],$$

де $E(x)$ – функція, що повертає цілу частину значення x; z_p – значення, що відповідає функції нормального розподілу ($z_p = 1{,}96$).

Якщо $(n_E + 1 - z_p \cdot \sqrt{n_E})$ не ціле число, тоді границями довірчого інтервалу з ймовірністю P є порядкові статистики S_L та S_H. Недоліком цього способу оцінювання невизначеності є похибка заокруглення при визначенні S_L та S_H.

Границі довірчого інтервалу нормалізованого вагового коефіцієнту з ймовірністю P обчислюються за формулами:

$$\rho_{iL} = \frac{S_{iL}}{\sum_{i=1}^{n} \text{med}(S_{ik})},$$

$$\rho_{iH} = \frac{S_{iH}}{\sum_{i=1}^{n} \text{med}(S_{ik})}, \ k = 1, n_E.$$

Але якщо кількість експертів $n_E < 10$, то при використанні формул (1) невизначеність оцінювання довірчих границь медіани збільшується за рахунок збільшення похибки заокруглення. В такому випадку рекомендовано формулу для обчислення ймовірності знаходження медіани в інтервалі двох порядкових статистик [3]. Формула (2):

$$P(x(k) < x_{0,5} < x(n_E - k + 1)) = 2 \cdot I_{0,5}(k, n_E - k + 1) - 1,$$

де $I_{0,5}(k, n_E - k + 1)$ знаходять як значення неповної бета-функції скориставшись формулою:

$$I_p(k, n_E - k + 1) = \sum_{i=k}^{n_E} C_{n_E}^{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n_E - i}.$$

2. Визначення вагових коефіцієнтів за експертним оцінюванням з виористанням медіани Уолша

Для зменшення невизначеності при оцінюванні вагового коефіцієнта в даній роботі пропонується використовувати медіану Уолша [5]. При застосуванні медіани Уолша для вибірки $X_1, ..., X_q$ будують $N = \frac{q \cdot (q+1)}{2}$ нових випадкових величин $Y_k = \frac{1}{2}(X_m + X_l), m \le l$ (їх називають середніми Уолша). А $W = \text{med}(Y_1, ..., Y_N)$ – медіана Уолша.

Для i-го вагового коефіцієнта маємо вибірку $\{S_{i1}, ..., S_{ik}, ..., S_{in_E}\}$ з табл. 2, побудуємо

$N = \frac{n_E \cdot (n_E + 1)}{2}$ нових випадкових величин $Y_{ik} = \frac{1}{2}(S_{im} + S_{il})$, $m \le l$ - середні Уолша. В результаті маємо матрицю середніх Уолша табл. 3.

Медіана вектор-рядків табл. 3:

$$\tilde{W}_i = med(Y_{ik}),\ i = 1, n,\ k = 1, N.$$

Нормалізовані вагові коефіцієнти отримують наступним чином:

$$\rho_i = \frac{W_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{W}_i} = \frac{med(Y_{ik})}{\sum_{i=1}^{n} med(Y_{ik})}, \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1.$$

При кількості середніх Уолша $N > 20$ за аналогією вищеприведеного методу застосуємо порядкові статистики Y_L та Y_H, що знаходяться з ранжованого ряду вектор-матриці (таблиця 3) за номерами L та H:

для нижньої границі $L = E[(N + 1 - z_p \cdot \sqrt{N})/2]$,

для верхньої границі $H = E[(N + 1 + z_p \cdot \sqrt{N})/2]$.

Таблиця 3

Середні Уолша

№ середнього Уолша / № вагового коефіцієнта	1	…	k	…	N
1	Y_{11}	…	Y_{1k}	…	Y_{1N}
⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
i	Y_{i1}	…	Y_{ik}	…	Y_{iN}
⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
n	Y_{n1}	…	Y_{nk}	…	Y_{nN}

Якщо $(N + 1 + z_p \cdot \sqrt{N})$ не ціле число, тоді границями довірчого інтервалу з ймовірністю P є порядкові статистики Y_L та Y_H.

Границі довірчого інтервалу нормалізованого вагового коефіцієнту з ймовірністю P обчислюються за формулами:

$$\rho_{iL} = \frac{Y_{iL}}{\sum_{i=1}^{n} med(Y_{ik})}, \rho_{iH} = \frac{Y_{iH}}{\sum_{i=1}^{n} med(Y_{ik})}, k = 1, N.$$

При $N < 20$ доцільно використовувати формулу для обчислення ймовірності знаходження медіани в інтервалі двох порядкових статистик, що проаналізована в роботі [4] з формули (2) маємо вираз для знаходження ймовірності при використанні медіани Уолша, формула (3):

$$P(x(k) < x_{0,5} < x(N - k + 1)) = 2 \cdot \sum_{i=k}^{N} C_N^i \cdot p^i \cdot (1 - p)^{N-i} - 1.$$

3. Ілюстрація зменшення невизначеності при використанні медіани Уолша

Проранжуємо вектор-рядки матриць 2 та 3 за зростанням: $S'_{i1}, ..., S'_{ik}, ..., S'_{in_E}$, де S'_{ik} - порядкові статистики ранжованого ряду, за яким знаходять медіану вибірки: $Y'_{i1}, ..., Y'_{ik}, ..., Y'_{iN}$, де Y'_{ik} - порядкові статистики ранжованого ряду середніх Уолша

$$(N = \frac{n_E \cdot (n_E + 1)}{2}),$$

за яким знаходять медіану Уолша.

За значеннями порядкових статистик з номерами L та H ряду $S'_{i1}, ..., S'_{ik}, ..., S'_{in_E}$ знаходимо відповідні значення в проранжированому ряді середніх Уолша $Y'_{i1}, ..., Y'_{ik}, ..., Y'_{iN}$. Таким чином визначаємо номер порядкових статистик в ряді проранжованих середніх Уолша та розраховуємо ймовірність знаходження медіани в інтервалі цих двох статистик за формулою (3).

Результати розрахунку невизначеності вагових коефіцієнтів, отриманих з використанням звичайної медіани та медіани Уолша за кількістю експертів від 3 до 10 наведено в табл. 4.

Розширена невизначеність обчислена для номерів порядкових статистик, що відповідають однаковій кількості експертів. Так як медіана Уолша має більшу ефективність, то значення ймовірності, що відповідає її розширеній невизначеності, значно перевищує значення ймовірності при використанні звичайної медіани. При різному співвідношенні значень вагових коефіцієнтів порядок ранжування може змінюватись в певному діапазоні, що впливає на значення ймовірності при використанні медіани Уолша. Враховуючи це, авторами були розраховані граничні значення ймовірності (мінімальна і максимальна).

В табл. 4 показані ймовірності знаходження медіани Уолша та медіани в заданому інтервалі. Добре видно, що ймовірність знаходження медіани Уолша значно більше, ніж звича йної медіани.

Висновки

В роботі розглянуто оцінювання вагових коефіцієнтів окремих показників при формуванні комплексного показника якості ПЗ з розрахунком невизначеності. Оцінювання вагових коефіцієнтів проводиться на основі експертного методу попарних порівнянь, тому адекватними статистичними характеристиками вагових коефіцієнтів є медіани рядків матриць попарного порівняння.

Перевагою медіани є її робастність, тобто нечутливість до аномальних результатів, викликаних некомпетентністю окремих експертів. Але медіана має значно нижчу ефективність за середнє арифметичне.

Таблиця 4

Порівняння значень ймовірності знаходження медіан в заданому інтервалі

Кількість експертів / Номера поряд. статистик	3	4	5	6	7	8	9	10
Медіана L=1 та $H = n_E$	0,75	0,875	0,938	0,969	0,984	0,992	0,996	0,998
Медіана Уолша L=1 та $H = N = \frac{n_E \cdot (n_E + 1)}{2}$	0,969	0,998	1	1	1	1	1	1
Медіана L=2 та $H = n_E - 1$	-	0,25	0,563	0,75	0,859	0,922	0,957	0,977
Ймовірність мед. Уолша Максимальне значення Мінімальне значення		0,869 0,547	0,992 0,957	1 0,998	1	1	1	1
Медіана L=3 та $H = n_E - 2$	-	-	-	0,094	0,422	0,641	0,781	0,869
Ймовірність мед. Уолша Максимальне значення Мінімальне значення				0,895 0,427	0,995 0,952	1 0,998	1	1

Для підвищення ефективності в роботі запропоновано використовувати медіану Уолша, і продемонстровано зменшення розсіювання у порівнянні зі звичайною медіаною при одинаковій кількості експертів.

Список літератури

1. *ДСТУ 2850-94 Програмні засоби ЕОМ. Показники і методи оцінювання якості. Чинний від 01,01,93. – Держстандарт України, 1994.*
2. *Лисецький Ю.М. Метод комплексной экспертной оценки для проектирования сложных технических систем / Ю.М. Лисецький // Математичні машини і системи. – 2006. – № 2. – С. 141-146.*
3. *Дэвид Г. Метод парных сравнений / Г. Дэвид. – М.: Статистика, 1978. – 144 с.*
4. *Сікоза О.М. Обчислення невизначеності при експериментальному оцінюванні вагових коефіцієнтів / О.М. Сікоза, Н. А. Яремчук // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 1 (91). – С .48-51.*
5. *Лагутин М.Б. Наглядная математичная статистика / М.Б. Лагутин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 472 с.*

Надійшла до редколегії 16.01.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.П. Захаров, Харковський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ЭКСПЕРТНОМ ОЦЕНИВАНИИ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕДИАНЫ УОЛША

О.Ю. Редёга, Н.А. Яремчук

В статье рассмотрены вопросы уменьшения неопределенности экспертной оценки весовых коэффициентов. Для достижения поставленной задачи использовано медиану Уолша. Приведены последовательность расчета весовых коэффициентов и их расширенной неопределенности с использованием медианы и медианы средних Уолша. С помощью порядковых статистик проведено сравнение результатов вычисления вероятности нахождения медианы и медианы Уолша на заданном интервале, что демонстрирует большую эффективность применения медианы Уолша.

Ключевые слова: *шкала порядка, весовые коэффициенты, экспертное оценивание, неопределенность.*

CALCULATION OF UNCERTAINTY IN THE EXPERT ASSESSMENT OF WEIGHT COEFFICIENTS USING MEDIAN WALSH

O.Y. Redyoga. N.A. Yaremchuk

In the paper the issues of reducing the uncertainty of expert assessment weight coefficients are considered. To achieve this task the median Walsh was used. A sequence of calculating the weighting coefficients and their expanded uncertainty using a median average and median Walsh is given. Using ordinal statistics, the comparison of the results of calculating the probability of finding the median and median Walsh at a specified interval was performed and it demonstraits greater effectiveness of median Walsh.

Keywords: *an order scale, weight coefficients, an expert assessment, an uncertainty.*