

УДК 621.312/314

А.М. Панченко

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

*Запропонована математична модель асинхронного двигуна, яка базується на рівняннях рівноваги напруг та моментів при використанні миттєвої форми запису струмів у колах статора і ротора.*

**Ключові слова:** асинхронний двигун, рівновага напруг, струм статора, кола статора і ротора.

### Постановка проблеми та аналіз літератури

Існує велика кількість різноманітних моделей асинхронних двигунів, які з тією чи іншою достовірністю описують перехідні процеси. Їх загальною рисою є те, що виконується заміна змінних величин, перехід до системи координат, що обертається, або до узагальненого вектора струму, у новій системі величин розв'язуються диференційні рівняння, а потім шляхом перетворень повертаються до дійсних значень струмів та напруг. Вказаний шлях є досить кропітким і не досить наочним. Автор пропонує математичну модель асинхронного двигуна в нерухомій системі координат, що дозволяє безпосередньо знаходити значення струмів статора, моменту та частоти обертання в перехідних режимах.

В [1] перехідні процеси розглядаються в системі координат, яка зв'язана зі статором. Отримані досить складні вирази для обертових моментів, введено додатково 50 складних коефіцієнтів. Системи диференційних рівнянь, отриманих в [2, 3], стали класичними, знайшли свій подальший розвиток [4 – 9] і широко використовуються в сучасних дослідженнях. Але всі вони використовують методичку переходу до нової системи координат та перетворення змінних.

**Мета статті** – розробка моделі асинхронного двигуна, яка дозволяє описувати перехідні процеси, використовуючи миттєві значення струму статора.

### Основний матеріал

Спочатку необхідно уточнити певні поняття. Так, загальноприйнятим терміном для симетричної трифазної системи є поняття магнітного поля, яке обертається. Розглянемо процеси лише в одній фазі асинхронного двигуна, при цьому неважливо буде ротор нерухомим, чи матиме якусь швидкість обертання. Магнітне поле в такій системі буде пульсуючим, тобто буде змінюватися відповідно до прикладеної напруги. Напрямок цього поля в просторі буде постійним, змінюватися буде величина магнітного

потoku подібно до того, як це відбувається у звичайному трансформаторі. Якщо об'єднати три фази, що зсунуті відносно одна одної у просторі та часі, отримаємо три пульсуючі поля, які відповідним чином зорієнтовані в просторі та часі. У дійсності вони не обертаються, а кожне окремо пульсує, отже, при їх сумісному розгляді можна використовувати принцип суперпозиції. Термін “обертання поля” дещо умовний, еквівалентний. Для обертання поля необхідне обертання котушок, які його створюють. Виходячи з того, що поля пульсують, ми маємо три відповідним чином зорієнтовані трансформатори. Домовимося, що асинхронний двигун симетричний. Відмінність такої моделі від моделі звичайного трансформатора полягає в тому, що вторинна обмотка з осередком обертається. На рис. 1 зображена модель асинхронного двигуна. По осі  $qq$  розміщена обмотка статора однієї з фаз, пунктиром показано магнітне поле, яке створене нею. У роторі (заштрихована область) обмотка розподілена рівномірно (біляча клітка). Магнітне поле статора формує обмотку ротора, оскільки відповідно до закону електромагнітної індукції контур зі струмом “прагне” охопити найбільший для нього зовнішній позитивний магнітний

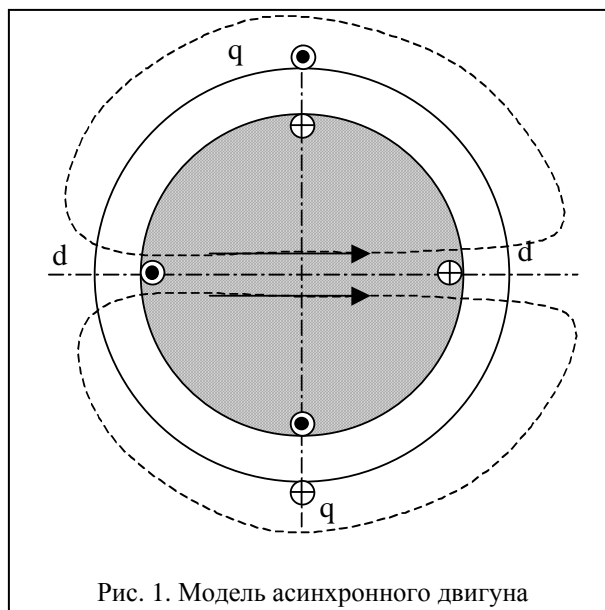


Рис. 1. Модель асинхронного двигуна

потік. Тому площини цих обмоток завжди збігаються незалежно від того, обертається ротор чи ні. Оскільки контур зі струмом так орієнтується в просторі, щоб охопити максимальний потік контур у роторі при його обертанні відносно магнітного потоку буде незмінним. Під контуром тут розуміється не якийсь певний виток, а та область з магнітопроводом і частиною білячої клітки, яка на даний момент часу зорієнтована паралельно площині обмотки. У даному випадку контур визначається не певним провідником (можна вважати, що біляча клітка настільки густа, що створює провідний циліндр), а положенням силових ліній електроіндукції в роторі.

Класична електродинаміка тіл, що рухаються, описує електрорушійну силу, яка при цьому виникає, таким рівнянням [7]:

$$e = \oint (-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{u} \times \vec{B}) d\vec{l}, \quad (1)$$

де  $\nabla\varphi$  – градієнт скалярного потенціалу;

$\vec{A}$  – векторний потенціал;

$\vec{u}$  та  $\vec{B}$  – вектори швидкості та магнітної індукції системи координат, в якій рухається тіло.

При інтегруванні по замкнутій поверхні скалярний потенціал зникає і вираз (1) можна записати як суму двох електрорушійних сил, перша з яких обумовлена зміною векторного потенціалу, а друга – переміщенням елемента контуру в магнітному полі:

$$e_p = \oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad e_u = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) d\vec{l}, \quad (2)$$

де  $d\vec{l}$  – орієнтований елемент контуру;

$\Phi$  – магнітний потік.

Можемо записати, що

$$e = \int_s \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S} + \oint (\vec{u} \times \vec{B}) d\vec{l}, \quad (3)$$

де  $d\vec{S}$  – елемент орієнтованої площини, яка охоплена елементарним контуром;

$s$  – контур, вздовж якого відбувається інтегрування.

Перший член виразу (3) прийнято називати трансформаторною електрорушійною силою (ЕРС), другий – електрорушійною силою, яка обумовлена обертанням ротора.

Таким чином трансформаторна ЕРС існує незалежно від того, обертається ротор чи ні, її контур зорієнтований перпендикулярно до осі  $d$ . Позначимо струм у цьому контурі як  $i_{2d}$ . Другий контур сторонньої ЕРС обумовлений взаємним переміщенням провідників ротора і магнітного поля статора, його контур зорієнтований по осі  $q$ . Позначимо струм у цьому контурі як  $i_{2q}$ . Слід також зауважити, що

першопричиною всього процесу в цілому є напруга, яка прикладена до фази обмотки. Таким чином, струм ротора складається із двох струмів, контури яких розміщені взаємо перпендикулярно. Магнітний потік від струму  $i_{2q}$  (обертовий) буде наводити у фазі обмотки статора сторонню  $E_{21q}$ , напрямком якої буде направлений проти причини, що її викликає, тобто проти прикладеної напруги, а величина буде залежати як від швидкості обертання, так і від величини струму. Магнітний потік, обумовлений струмом  $i_{2d}$  (трансформаторний), буде наводити  $E_{21d}$ , напрямком якої буде збігатися з напрямком прикладеної напруги. Можемо записати рівняння балансу напруг для однієї фази статора асинхронного двигуна:

$$U_0 \sin(\omega t + \psi_0) = L_1 i_1'(t) + r_1 i_1(t) - M i_{2d}'(t) + c_e i_{2q}(t) \omega(t), \quad (4)$$

де  $i_1(t)$ ,  $i_1'(t)$  – струм та його похідна фази обмотки статора;

$L_1$ ,  $r_1$  – індуктивність та активний опір фази обмотки статора;

$M$  – взаємні індуктивність фази обмотки статора та контуру (трансформаторного), що зорієнтовані по осі  $d$ ;

$i_{2d}'(t)$  – похідна трансформаторної складової струму ротора;

$i_{2q}(t)$  – струм ротора, обумовлений його обертанням;

$c_e$  – електромагнітна стала, обумовлена конструктивними властивостями двигуна;

$\omega(t)$  – кутова частота обертання ротора.

Рівняння (4) – це рівняння балансу напруг фази статора, у якому струм статора представлений у явному вигляді, а струм ротора – двома складовими.

Запишемо рівняння балансу напруг для ротора. Використовуючи принцип суперпозиції магнітних полів, будемо вважати, що при обертанні ротора контури трансформаторний і обертовий залишаються нерухомими відносно магнітного поля, яке їх створює. Під контуром будемо розуміти не фізичний контур із провідників, а ті контури, що утворені відповідними ЕРС. Таким чином, у розглянутій моделі контур незмінний, а ділянки, через які проходить струм, постійно змінюються, опір та індуктивність ротора в такому випадку також сталі. Рівняння балансу напруг для кола ротора набере вигляду

$$\begin{cases} M i_1(t) = L_2 i_{2q}'(t) + r_2 i_{2q}(t); \\ c_e i_1(t) \omega(t) = L_2 i_{2d}'(t) + r_2 i_{2d}(t). \end{cases} \quad (5)$$

Рівняння (4) та (5) описують електромагнітні

процеси. Для доповнення їх описання процесів слід зауважити, що ротор є суцільним тілом, у якому електромагнітні моменти, що отримані від різних складових, можна складати. У зв'язку з цим рівняння рівноваги електромагнітних моментів, діючих на ротор, можна подати у вигляді

$$c_M Mi_1(t) [i_{2q}(t) + i_{2d}(t)] - M_0 = j \frac{d\omega}{dt}, \quad (6)$$

де  $c_M$  – електромеханічна стала, обумовлена конструктивними властивостями двигуна;

$M_0$  – момент опору;

$j$  – момент інерції ротора.

Вираз (6) записано на підставі того, що електромагнітний обертовий момент пропорційний векторному добутку відповідних складових струмів та поточозчеплень, зсунутих одна відносно одної на кут  $90^\circ$ . Таким чином загальна система диференціальних рівнянь асинхронного двигуна має такий вигляд:

$$\begin{cases} U_0 \sin(\omega t + \psi_0) = \\ = L_1 i_1'(t) + r_1 i_1(t) - M i_{2d}'(t) + c_e i_{2q}(t) \omega(t); \\ Mi_1(t) = L_2 i_{2q}'(t) + r_2 i_{2q}(t); \\ c_e i_1(t) \omega(t) = L_2 i_{2d}'(t) + r_2 i_{2d}(t); \\ c_M Mi_1(t) [i_{2q}(t) + i_{2d}(t)] - M_0 = j \frac{d\omega}{dt}. \end{cases} \quad (7)$$

Отримана система диференціальних рівнянь має четвертий порядок і є нелінійною, оскільки декілька з її членів мають добуток змінних. Аналітичне розв'язання такої системи неможливе, але воно отримано у числовому вигляді за допомогою розробленої для цього програми.

На рис. 2 наведені миттєві значення струмів статора (а) та складових струму ротора (б). Суцільна лінія відноситься до трансформаторного струму, штрихована – до обертового. На рис. 3 наведені графіки зміни кутової частоти обертання (а) та обертаючого моменту (б) для однієї з фаз.

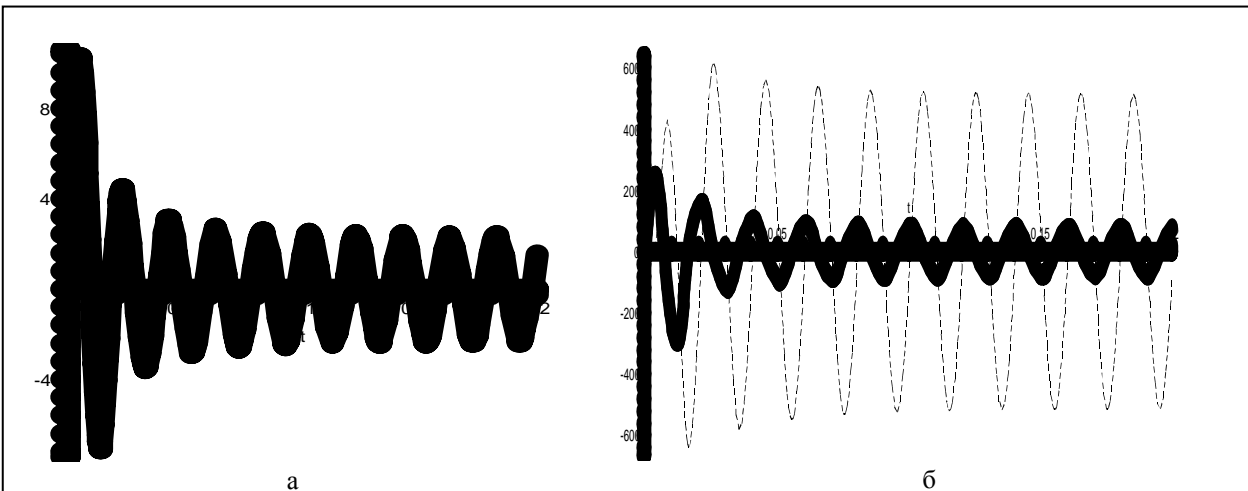


Рис. 2. Графіки зміни струму в фазі статора (а), та складові струму ротора (б)



Рис. 3. Графіки зміни швидкості (а) та моменту (б) асинхронного двигуна

Вище було вказано, що поле однієї фази є полем

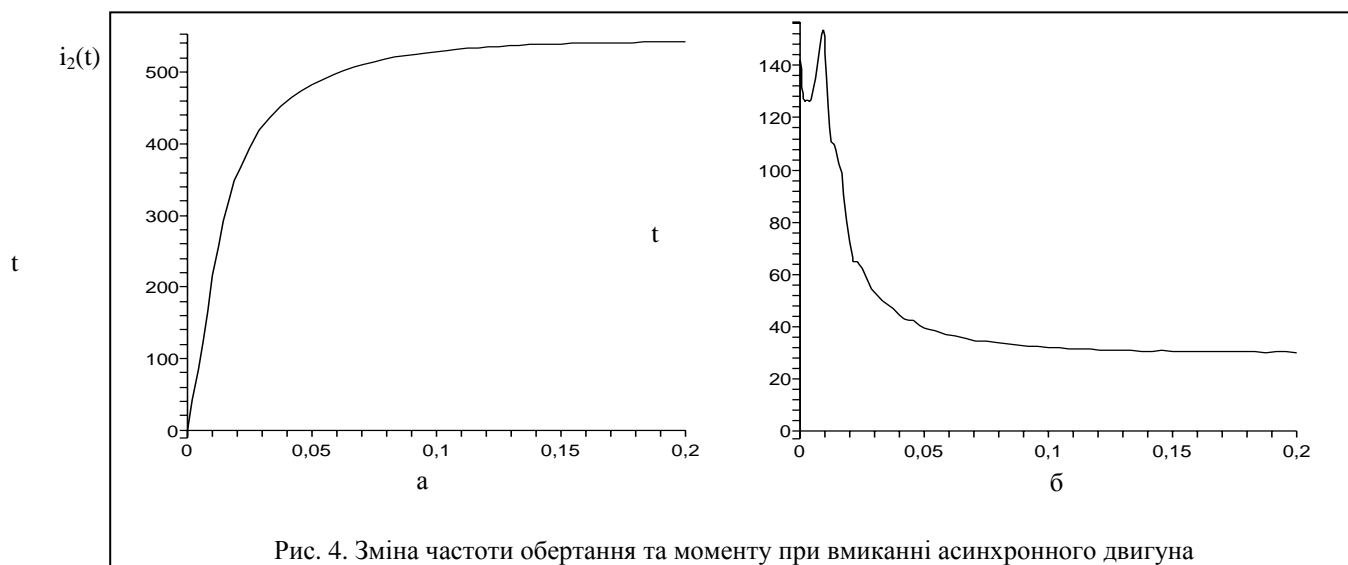


Рис. 4. Зміна частоти обертання та моменту при вмиканні асинхронного двигуна

пульсуючим. Поля трьох фаз, очевидно, також будуть пульсуючими. Інша справа, що комбінація трьох пульсуючих полів може бути представлена одним еквівалентним полем, що обертається. Але це вже є певна умовність. Якщо ми маємо три пульсуючих поля і в них є спільне тверде тіло (ротор), то знову можна використати принцип суперпозиції. Тобто сума миттєвих моментів від трьох фаз дорівнює загальному електромагнітному моменту. Тому результуюча частота обертання ротора буде дорівнювати сумі відповідних частот обертання кожної фази. При цьому слід враховувати їх “зсув” у часі. На рис. 4 наведені графіки зміни сумарної частоти обертання та сумарного електромагнітного моменту на валу.

Отримана на рис. 4,б графічна залежність зміни у часі електромагнітного моменту збігається з дослідними даними [9], де є аналогічний провал моменту на початку пуску.

#### Висновок

Запропонована модель дозволяє вести дослідження перехідних процесів в асинхронному двигуні, оперуючи дійсними значеннями струму статора і не використовуючи при цьому додаткові математичні перетворення.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gilfillan E.S, Kaplan E.L. Transient Torques in Squirrel-cage Induction Motors, with Special Reference to Plugging // Trans. AIEE. – 1941. – V. 60. – 1200 p.
2. Park R.H. Two-Reaction Theory of Synchronous Machines // Trans. AIEE. – 1933. – 120 p.
3. Горев А.А. Переходные процессы синхронной машины. – М.: Госэнергоиздат, 1950. – 198 с.
4. Шуйский В.П. Расчет электрических машин. – Л.: Энергия, 1968. – 731 с.
5. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. – М.: Энергия, 1980. – 926 с.
6. Ковач К.П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1936. – 743 с.
7. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высш. шк., 2001. – 403 с.
8. Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел. – М.: Энергоиздат, 1982. – 191 с.
9. Вольдек А.И. Электрические машины. – Л.: Энергия, 1974. – 839 с.

Надійшла 17.04.2006

Рецензент: д-р техн. наук професор Б.Т. Кононов, Харківський університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба.