

УДК 621.396

А.Е. Голоскоков, М.А. Бродский

*Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*

### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ СБЛИЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*В данной статье рассмотрен пример решения задачи оценки сближения траекторий двух динамических объектов. Проведено моделирование движения воздушных судов с учетом влияния случайных возмущений в математической среде MatLab. Построены относительные проекции траекторий движения двух судов. Получена оценка возникновения конфликтной ситуации. Процесс движения судов описывается случайным марковским процессом Орнштейна-Уленбека.*

**Ключевые слова:** конфликтная ситуация, марковский процесс, стохастические дифференциальные уравнения, воздушное судно.

#### **Введение**

В мировом авиационном сообществе активно обсуждается проблема безопасности полетов в связи с переходом от централизованного управления воздушным движением (УВД) к децентрализованному. Решить данную проблему возможно с помощью введения режима «свободного полета» (Free Flight) [1].

Концепция свободного полёта подразумевает существование среды, в которой пилот наделен полномочиями выбора маршрута в реальном времени без контроля со стороны диспетчера и, следовательно, пилот уже сам несет ответственность за безопасность и оптимальное проведение полёта [2].

Новая концепция, которая позволяет повысить производительность и безопасность воздушного движения путем оптимизации взаимодействия диспетчеров, экипажей самолетов и других служб за счет интеграции цифровой системы передачи данных, улучшения методов наблюдения и автоматизации, получила название кооперативное УВД.

Из-за наличия достаточно большого числа факторов, приводящих к отклонению самолета от заданных параметров траектории движения, возмож-

ны ситуации, когда нарушаются нормы безопасного расстояния между самолетами. При этом возникает угроза их столкновения, даже если первоначально спланированные полеты являются бесконфликтными и имеется система, контролирующая воздушное движение. В условиях оперативно изменяющейся воздушной обстановки, связанной с изменением направления и динамикой относительного движения самолетов, а также при сокращении норм эшелонирования значительно возрастает роль системы обнаружения и предупреждения опасного сближения самолетов.

В этой ситуации моделирование движения воздушных судов (ВС) под воздействием случайных внешних воздействиях и оценка вероятности их опасного сближения является актуальной проблемой.

В работе [3] была рассмотрена задача прогнозирования конфликтных ситуаций, построена модель движения воздушных судов с учетом влияния случайных возмущений. Настоящая статья является продолжением, в которой рассматривается численный пример решения задачи оценки конфликтной ситуации.

**Описание объекта исследования.** Объектом исследования в данной работе является пара дина-

мических объектов – воздушные судна (ВС). ВС, как динамические объекты, характеризуется вектором состояний.

Установим компоненты вектора состояния для каждого воздушного судна, которые будут использоваться для расчета численного примера:

$$D_j = \{x_j(t), y_j(t), z_j(t), t, \Delta x_j(t), \Delta y_j(t), \Delta z_j(t), v_{xj}(t), v_{yj}(t), v_{zj}(t), v_{0j}, \Delta v_{xj}(t), \Delta v_{yj}(t), \Delta v_{zj}(t), W_j(t)\},$$

$$j = 1, 2,$$

где  $x_j(t)$  – координата продольного положения самолета в момент времени  $t$ ;

$y_j(t)$  – координата бокового положения самолета в момент времени  $t$ ;

$z_j(t)$  – координата вертикального положения самолета в момент времени  $t$ ;

$t$  – текущий момент времени;

$\Delta x_j(t)$  – отклонение продольного положения самолета от линии заданного курса;

$\Delta y_j(t)$  – отклонение от линии заданного курса;

$\Delta z_j(t)$  – отклонение вертикального положения самолета от линии заданного курса;

$v_{xj}(t)$  – скорость полета по оси  $x$ ;

$v_{yj}(t)$  – скорость полета по оси  $y$ ;

$v_{zj}(t)$  – скорость полета по оси  $z$ ;

$v_{0j}$  – заданная скорость полета;

$\Delta v_{xj}(t)$  – отклонение от заданной скорости по оси  $x$ ;

$\Delta v_{yj}(t)$  – отклонение от заданной скорости по оси  $y$ ;

$\Delta v_{zj}(t)$  – отклонение от заданной скорости по оси  $z$ ;

$W_j(t)$  – винеровский процесс, с помощью которого моделируется воздействие внешней среды на ВС.

**Постановка задачи исследования.** Задачей численного исследования является оценка конфликтной ситуации между парой ВС под воздействием различных векторов случайных возмущений при разных начальных условиях и оценка влияния данного вектора на дисперсию бокового отклонения движения положения самолета.

Состояние системы в некоторый момент времени описывается случайным векторным процессом  $x_t = \{x_1(t), \dots, x_N(t)\}$  в  $N$ -мерном пространстве. Компонентами случайного вектора  $x_t$  являются координаты и скорости динамического объекта.

Запишем многомерным линейное стохастическое дифференциальное уравнение в общем виде

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \Sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (3)$$

где  $x_t \in \mathcal{R}^n$  – случайный марковский процесс, являющийся решением уравнения (3) (согласно теореме Дуба [5]);

$f_t \in \mathcal{R}^m$ ,  $F_t$  – измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $f_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;

$a: \mathcal{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^n$  – коэффициент сноса;

$\Sigma: \mathcal{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$  – коэффициент диффузии;

$x_0$  – начальное условие;

$x_0, f_t - f_0, t > 0$  – стохастические независимые процессы [4].

Каждому элементу вектора  $D_j$  соответствует элемент многомерного марковского процесса  $x_t$ , которые в свою очередь описываются случайным процессом Орнштейна-Уленбека

$$x_t = \{x(t), y(t), \Delta v_x(t), \Delta v_y(t)\}. \quad (4)$$

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве, ось  $Ox$  направлена вдоль линии заданного пути, ось  $Oy$  направлена вдоль линии бокового положения самолета, ось  $Oz$  направлена вдоль линии вертикального положения самолета (рис. 1), где  $x(t)$  – координата продольного положения самолета в момент времени  $t$ ;  $y(t)$  – координата бокового положения самолета от линии заданного пути;  $v_x(t)$  – скорость полета ВС;  $\Delta v_x(t)$  – отклонение от заданной скорости по оси  $x$ ;  $\Delta v_y(t)$  – отклонение от заданной скорости по оси  $y$ ;  $\Delta v_z(t)$  – отклонение от заданной скорости по оси  $z$ .

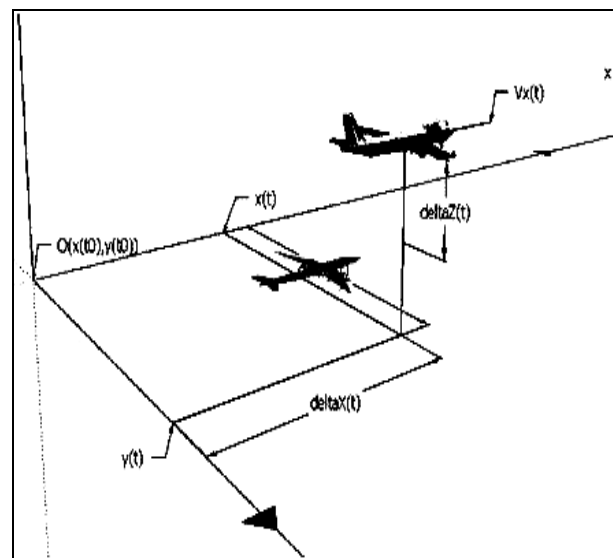


Рис. 1. Перемещение ВС в системе координат

Процесс отклонения от линии заданного пути является случайным процессом, и аппроксимировать его можно случайным процессом Орнштейна-Уленбека:

$$dy(t) = -\alpha_y y(t)dt + \sigma_y dW_y(t), \quad (5)$$

где  $\alpha_y, \sigma_y$  – известные положительные коэффициенты [4].

Случайный марковский процесс Орнштейна-Уленбека есть решение стохастического дифференциального уравнения Орнштейна-Уленбека.

Отклонение самолета от заданной скорости полета по каждой координате также описывается случайным процессом Орнштейна-Уленбека:

$$d\Delta v = -\alpha\Delta vdt + \sigma dW, \quad (6)$$

где  $\alpha, \sigma$  – известные положительные коэффициенты;  $W = W_y(t)$  – стандартный винеровский процесс;  $\Delta v = v(t)$  – отклонение от заданной скорости.

На процесс отклонения самолета в продольном движении наиболее существенное влияние оказывают ветровые воздействия, поэтому для продольной координаты запишем модель в виде

$$dx(t) = (v_0 + \Delta v_x(t))dt, \quad (7)$$

где  $x(t)$  – координата продольного положения самолета в момент времени  $t$ ;  $\Delta v_x(t) = v_x(0) - v_0$  – отклонение от заданной скорости полета;  $v_0$  – заданная скорость полета ВС вдоль линии заданного пути.

### Численное решение СДУ

Запишем систему стохастических дифференциальных уравнений, в которой учитывается управляющее воздействие по осям  $x$  и  $y$ . Процесс отклонения от заданной скорости полета по осям  $x$  и  $y$  считается случайным процессом и описывается следующим выражением для многомерного марковского процесса (вектор состояния):

$$x_t = \{x(t), y(t), \Delta v_x(t), \Delta v_y(t)\}.$$

На основе уравнений (5) – (7) запишем ССДУ:

$$\begin{cases} dx(t) = (v_0 + \Delta v_x(t))dt; \\ d\Delta v_x = -\alpha_x \Delta v_x dt + \sigma_x dW; \\ dy(t) = v_y(t)dt; \\ d\Delta v_y = -\alpha_y \Delta v_y dt + \sigma_y dW, \end{cases} \quad (8)$$

или векторной форме:

$$dx_t = \begin{bmatrix} v_0 + \Delta v_x(t) \\ v_y \\ -\alpha_x \Delta v_x \\ -\alpha_y \Delta v_y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_x W_x(t) \\ \sigma_y W_y(t) \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x(0) \\ v_y(0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{или} \quad dx_t = \left[ v_0 e + \Lambda \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \right] dt + SdW, \quad (10)$$

где

$$e = [1, 0, 0, 0]^T; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha_x & 0 \\ 0 & -\alpha_y \end{bmatrix}; \quad W(t) = \begin{bmatrix} W_x(t) \\ W_y(t) \end{bmatrix}.$$

Предположим, что ВС совершают движение на одном высотном эшелоне в одном направлении, параллельно друг к другу. Осуществим решение системы (9) при следующих исходных данных: значения коэффициентов для модели отклонения от ли-

нии заданного пути примем  $\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$  – для

первого самолета и  $\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$  – для второ-

го самолета, с начальными условиями  $x(0) = 0, y(0) = 0,6, \Delta v_x(t) = 0, \Delta v_y(t) = 0$  – для первого воздушного судна и  $x(0) = 0, y(0) = 10, \Delta v_x(t) = 0, \Delta v_y(t) = 0$  – для второго воздушного судна. Все величины измеряем в условных единицах. Эволюция фазовых траекторий системы (9) на интервале времени  $t \in [t_1, t_2], t_1 = 0, t_2 = 20$  приведена на рисунках ниже.

На рис. 2 представлены относительные траектории движения двух ВС, являющиеся проекциями перемещений в пространстве боковых координат ВС на плоскости под действием случайных возмущений.

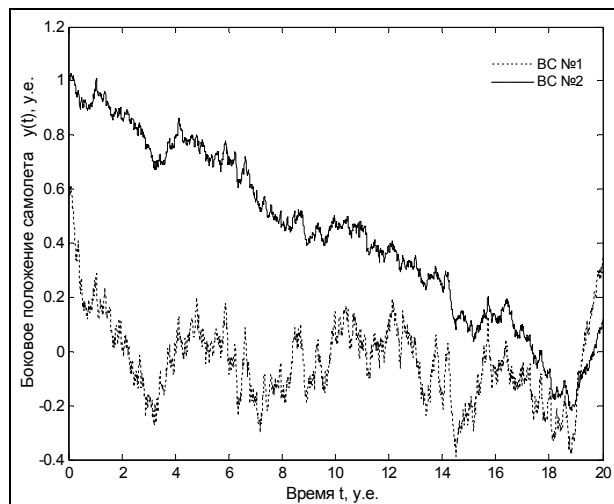


Рис. 2. Реализации проекций относительных боковых координат двух ВС  $y_{1,2}(t)$

Для построения графика случайного марковского процесса  $y_{1,2}(t)$  была решена система (9) с начальными условиями:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,6, \quad \Delta v_x(t) = 0, \quad \Delta v_y(t) = 0$$

для первого воздушного судна;

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \Delta v_x(t) = 0, \quad \Delta v_y(t) = 0$$

для второго воздушного судна.

На рис. 3 представлены относительные траектории движения двух ВС, являющиеся проекциями перемещений в пространстве продольных координат ВС на плоскости под действием случайных возмущений.

Для построения графика случайного марковского процесса  $x_{1,2}(t)$  была решена система (9) с начальными условиями:

$$x(0) = 0,6, \quad y(0) = 0, \quad \Delta v_x(t) = 0, \quad \Delta v_y(t) = 0$$

для первого воздушного судна;

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad \Delta v_x(t) = 0, \quad \Delta v_y(t) = 0$$

для второго воздушного судна.

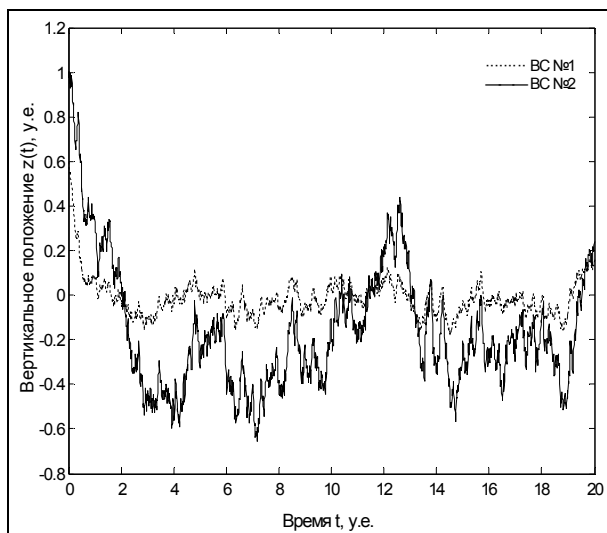


Рис. 3. Проекция относительных вертикальных координат двух ВС, марковский процесс  $z_{1,2}(t)$

На рис. 4 приведены графики дисперсий случайных величин  $y_{1,2}(t)$  каждого из ВС, характеризующие величину отклонения от заданных траекторий движения ВС.

На рис. 5 приведены графики траекторий движения ВС в трехмерном пространстве, где по оси x отложен временной интервал,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $t_1 = 0, t_2 = 20$ , по оси y изменение траектории бокового положения – значения марковского процесса  $y(t)$ , по оси z изменение траектории в вертикальных координат положении – значение марковского процесса  $x(t)$ .

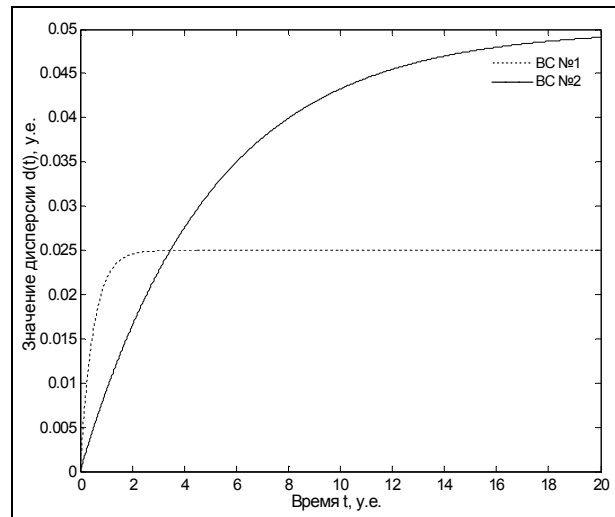


Рис. 4. Графики дисперсий бокового отклонения воздушных судов

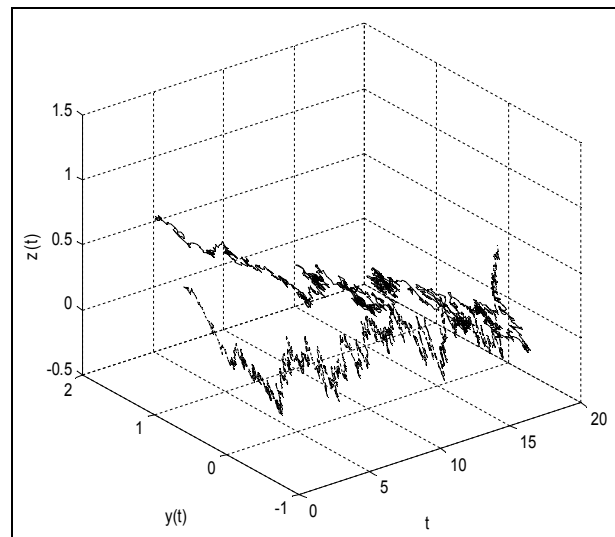


Рис. 5. Относительные траектории движения воздушных судов в пространстве

При рассмотрении данного варианта, когда оба ВС совершают движение на одном воздушном эшелоне, в одном направлении, нас будет интересовать проекция бокового положения воздушных судов, так как проекции продольных координат, в данном случае, могут пересекаться сколько угодно раз.

Исходя из приведенных графиков траекторий относительного движения нетрудно заметить возникновение конфликтной ситуации на временном интервале  $t \in [0, 20]$ .

Табл. 1, приведенная ниже, отображает расстояние между двумя ВС в пространстве в момент времени  $t$ .

Возникновение КС происходит, когда разрешенное расстояние между случайными процессом  $x_t$  будет удовлетворять неравенству  $d < 1$ , где  $d$  – расстояние между двумя ВС в момент времени  $t$ .

Таблица расстояний между ВС в момент времени t

Время, t	18,03	18,04	18,05	18,06	18,07	18,08	18,09	18,1	18,11
Расстояние, у.е.	0.110	0.093	0.107	0.072	0.131	0.165	0.170	0.180	0.217

По результатам данного расчета с выше заданными начальными условиями были получены результаты оценки КС.

Исходя из них, спрогнозировано возникновение КС в момент времени  $t = 18,06$  у.е. Часть расчетов приведена в табл. 1.

Исходя из рис. 5 можно сделать вывод, что дисперсия бокового отклонения от траектории движения второго ВС увеличивается во времени, а первого ВС остается постоянной и равной  $D = 0,025$  на всем временном интервале.

Таким образом, движение второго ВС чрезвычайно опасно с точки зрения возникновения конфликтной ситуации.

### Выводы

В работе приведена математическая модель движения ВС под влиянием случайных возмущений, основанная на математическом аппарате линейных стохастических дифференциальных уравнений. Решен численный пример задачи оценки сближения траектории двух динамических объектов. Задача решена на тестовом примере с заданными начальными условиями. На основании численных значений, полученных после моделирования в среде MatLab, получена оценка конфликтной ситуации. Дальнейшим развитием работы авторы видят в нахождении вероятности конфликтной ситуации из многомерного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова.

### Список литературы

1. Doweck G. Tactical Conflict Detection and Resolution in a 3-D Airspace / G. Doweck // Europe Air Traffic Management R&D Seminar Santa Fe. – 2001. – Vol. 4, № 2. – P. 242-249.
2. Золотухин В.В. Актуальные задачи управления воздушным движением / В.В. Золотухин // ТРУДЫ МФТИ. – 2009. – Т. 1, № 3. – С. 109-111.
3. Голоскоков А.Е. Моделирование совместного движения динамических объектов с учетом влияния случайных возмущений / А.Е. Голоскоков, М.А. Бродский // Вісник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 9. – С. 57-62.
4. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика / Д.Ф. Кузнецов. – СПб.: Политехн. ун-т, 2010. – 816 с.
5. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы / Дж.Л. Дуб. – М.: ИЛ, 1956. – 536 с.
6. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
7. Свеишников А.А. Прикладные методы теории случайных функций / А.А. Свеишников. – М.: Наука, 1968. – 449 с.

Поступила в редколлегию 26.01.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Кононенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

### ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ОЦІНКИ ЗБЛИЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЙ ДВОХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О.Є. Голоскоков, М.О. Бродський

У даній статті розглянутий приклад рішення задачі оцінки зближення траєкторій двох динамічних об'єктів. Проведено моделювання руху повітряних суден з урахуванням впливу випадкових обурень в математичному середовищі MatLab. Побудовані відносні проекції траєкторій руху двох суден. Отримана оцінка виникнення конфліктної ситуації. Процес руху судів описується випадковим марківським процесом Орнштейна-Уленбека.

**Ключові слова:** конфліктна ситуація, марківський процес, стохастичні диференціальні рівняння, повітряне судно.

### NUMERAL DECISION OF TASK OF ESTIMATION OF RAPPROCHEMENT OF TRAJECTORIES OF TWO DYNAMIC OBJECTS ON THE BASIS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS

A. A. Goloskov, M. A. Brodskiy

The example of decision of task of estimation of rapprochement of trajectories of two dynamic objects is considered in this article. The design of motion of air courts is conducted taking into account influence of casual indignations in the mathematical environment of MatLab. The relative projections of trajectories of motion of two courts are built. An estimation is got origin of conflict situation. The process of motion of courts is described the casual марковским процесс of Ornshteyn-Ulenbek.

**Keywords:** conflict situation, Markovian process, stochastic differential equalizations, air ship.