УДК 519.7

О.В. Калиниченко, В.А. Лещинский, В.П. Епик, К.М. Яковенко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЗМОВ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

Рассмотрено применение аппарата компараторной идентификации при моделировании работы зрения человека. Исследованы модели низшей и высшей метрик цвета. Проанализирована задача математического моделирования стационарных и однородных процессов в зрении человека.

Ключевые слова: *математическое моделирование зрения, иррадиация, контраст, метрика цвета.*

Введение

Целью настоящей статьи является исследование органа зрения человека, являющегося сложнейшей системой приема и обработки информации. Многое о принципах работы органа зрения человека уже известно, и эти знания широко используются в светотехнике, технике кино и телевидения, полиграфии и ряде других областей. Глаз современного человека работает в контакте со многими техническими устройствами. К ним относятся установки телевидения, кино и радиолокации, пульты управления, измерительные приборы, светотехнические устройства, книги, различные знаки (например, дорожные), карты и многое другое. Все эти устройства строятся с учетом свойств человеческого зрения. Например, скорость развертки луча в телевизионном изображении, размеры и форма шрифтов книг, частота смены кадров в кино, характер сигнальных огней, размеры и форма шкал, режимы освещения – все это выбирается в зависимости от свойств человеческого зрения. Чем лучше и полнее мы будем знать эти свойства, тем эффективнее, проще и дешевле будут технические устройства, создаваемые для совместной работы с органом зрения человека.

Данные о принципах работы органа зрения важны также в связи с тем, что уже в настоящее время для различных технических целей создаются специальные устройства фотоввода информации. Это различного рода фотоприемные устройства для измерительных приборов и систем автоматики, телевизионные системы и системы радиолокации, устройства фотоввода информации в вычислительные, управляющие и информационные машины. Орган зрения человека также является фотоприемником информации. Будучи неизмеримо более совершенным по сравнению с техническими приборами, орган зрения человека во многих отношениях может служить образцом при создании новых и усовершенствовании существующих устройств фотоввода информации.

При исследовании органа зрения человека целесообразно рассматривать его как устройство, осуществляющее прием и преобразование сигналов. В настоящей работе рассматривается задача исследования закономерностей преобразования сигналов в органе зрения человека с целью формулировки этих закономерностей в виде математических моделей. Основой при построении математических моделей работы органа зрения будут служить психофизические реакции зрительного анализатора. При такой постановке задачи для наблюдения доступны лишь входные и выходные сигналы органа зрения, и математическое моделирование зрительных процессов можно вести по методу, получившему название метода кибернетического «черного ящика». Входными сигналами органа зрения являются зрительные картины, наблюдаемые испытуемым, а выходными – возникающие при этом у испытуемого зрительные ощущения.

Следует отметить, что математическое моделирование зрения человека, основанное на изучении психофизических реакций глаза и фактическом использовании понятия «черного ящика», не является чем-то принципиально новым. Такая работа, хотя и в иных терминах, ведется уже давно, и к настоящему времени в области математического моделирования зрения получен ряд существенных результатов. В этой области успешно работали Ньютон, Юнг, Максвелл, Грассман, Гельмгольц, Шредингер. Однако, в связи со сложностью законов преобразования информации в органе зрения человека, многие стороны и свойства зрения остаются пока еще не охваченными математическими моделями.

Зрительные процессы

Рассмотрим, что представляют собой входные и выходные сигналы органа зрения человека, и дадим их математическое описание.

Каждой точке поля зрения соответствует входной сигнал b_λ, характеризующий зрительную картину в этой точке в данный момент времени, а именно: спектральная плотность лучистой яркости в функции длины волны или просто спектр излучения $b(\lambda)$ [1, с. 34]. Любая конкретная зрительная картина, заданная в поле зрения, может быть математически описана в виде функции входного сигнала b_λ от координат поля зрения x, y и времени t:

$$b_\lambda = b_\lambda(x, y, t). \qquad (1)$$

Таким образом, в принципе, можно математически описать любую зрительную картину, изменяющуюся в пространстве и во времени. В органе зрения человека осуществляется преобразование зрительной картины в зрительное ощущение 3. Зрительное ощущение также задано в двумерном поле. Точке M′ зрительного ощущения приписываем координаты x, y соответствующей точки M зрительной картины. Зрительное ощущение в каждой точке поля зрения характеризуется цветом. Считаем, что цвет может быть разложен на три компонента: цветовой тон, насыщенность и светлоту [2, с. 11]. Таким образом, зрительное ощущение в каждой точке поля зрения будем описывать с помощью трехмерного вектора цвета $\overline{S}$, компонентами которого служат светлота S_1, насыщенность S_2 и цветовой тон S_3. Зрительное ощущение в целом, так же, как и зрительная картина, может быть описано некоторой зависимостью цвета $\overline{S}$ от координат поля зрения x, y и времени t:

$$\overline{S}=\overline{S}\,(x, y, t). \tag{2}$$

Мы ввели в рассмотрение входной $b_\lambda(x, y, t)$ и выходной $\overline{S}\,(x, y, t)$ сигналы органа зрения. Теперь более строго и детально сформулируем задачу исследования. Она состоит в том, чтобы отыскать закон F преобразования входного сигнала органа зрения в выходной:

$$\overline{S}\,(x, y, t) = F(b_\lambda(x, y, t)). \tag{3}$$

Функция F преобразует бесконечномерную вектор-функцию $b_\lambda(x, y, t)$ трех переменных x, y, t в трехмерную вектор-функцию $\overline{S}\,(x, y, t)$ тех же переменных. Можно считать, что функция F есть векторный оператор [3, с. 12], который ставит в соответствие вектор-функциям $b_\lambda(x, y, t)$ вектор-функции $\overline{S}$ (x, y, t). Исходя из повседневного исследования зрения, можно заключить, что этот оператор непрерывен [3, с. 18], поскольку всегда при непрерывном изменении зрительной картины $b_\lambda(x, y, t)$ наблюдается непрерывное изменение зрительного ощущения $\overline{S}\,(x, y, t)$. Даже не опираясь на специальные эксперименты, а используя только повседневную практику зрения каждого человека, можно заключить, что искомый оператор зрения F не будет очень простым. Напротив, легко прийти к выводу о его большой сложности. Этот оператор должен воспроизводить разнообразные свойства цветового зрения, инерции и иррадиации зрения, адаптации и контраста. В связи с этим имеет смысл общую задачу нахождения оператора F разбить на ряд более простых задач.

Наиболее простой постановка задачи получается, если ограничить класс входных сигналов лишь однородными и стационарными зрительными картинами. Однородной называется такая зрительная картина, у которой излучения во всех точках поля зрения одинаковы. В этом случае входной сигнал b_λ не зависит от координат поля зрения x, y, а зависит лишь от времени t, то есть $b_\lambda=b_\lambda(t)$. Стационарной называется такая зрительная картина, у которой излучения во всех точках не изменяются со временем. Иными словами, функция b_λ, описывающая зрительную картину, не зависит от времени, а зависит лишь от координат поля зрения, то есть $b_\lambda=b_\lambda(x, y)$. Функция, описывающая однородную и стационарную зрительную картину, не зависит от координат поля зрения и времени и представляет собой спектр излучения $b_\lambda=b(\lambda)$. Такая картина представляет собой равномерное поле сигналов, не изменяющихся с течением времени. Опыт показывает, что таким зрительным картинам соответствует зрительное ощущение, также являющееся однородным и стационарным, то есть не зависящее от координат поля зрения. Зрительное ощущение имеет вид равномерного фона одного цвета, заполняющего все поле зрения. Выходной сигнал представляет собой трехмерный вектор $\overline{S}$.

Далее можно усложнить задачу, расширив класс входных сигналов за счет введения нестационарных зрительных картин. В этом случае входной сигнал становится функцией времени, то есть $b_\lambda=b_\lambda(t)$. Опыт показывает, что зрительное ощущение также будет представлять собой функцию времени и не будет зависеть от координат поля зрения, то есть $\overline{S}=\overline{S}\,(t)$. Зрительное ощущение будет выглядеть в виде равномерного фона, цвет которого изменяется со временем. Точно так же возможно изолированное рассмотрение задачи о связи $b_\lambda(x)$ и $\overline{S}\,(x)$, $b_\lambda(y)$ и $\overline{S}\,(y)$. Далее могут быть изолированно рассмотрены задачи о связи сигналов $b_\lambda(x, y)$ и $\overline{S}\,(x, y)$, $b_\lambda(x, t)$ и $\overline{S}\,(x, t)$, $b_\lambda(y, t)$ и $\overline{S}\,(y, t)$. Наконец, мы приходим к общей задаче о связи между сигналами $b_\lambda(x, y, t)$ и $\overline{S}\,(x, y, t)$.

Построение математической модели стационарных и однородных зрительных процессов $\overline{S}=F(b(\lambda))$ должно основываться на фактах так называемых низшей и высшей метрик цвета. Исследование нестационарных зрительных процессов $\overline{S}\,(t)=F(b_\lambda(t))$ требует рассмотрения явлений *инерции* и *адаптации зрения*. Математическая модель неоднородных зрительных процессов $\overline{S}\,(x, y)=F(b_\lambda(x, y))$ может быть построена на основе изучения фактов *иррадиации зрения* и явлений *зрительного контраста*. Задача моделирования зрительных процессов в общем случае $\overline{S}\,(x, y, t)=F(b_\lambda(x, y, t))$ приводит к необходимости изучения реакций органа зрения на зрительные картины произвольной сложности. Таким образом, мы приходим к необходимости освоения обширного экспериментального материала. Здесь мы ограничимся построением математических моделей для ряда частных случаев функционирования органа зрения.

Стационарные и однородные процессы

Задача математического моделирования стационарных и однородных зрительных процессов сводится к отысканию вида зависимости:

$$\overline{S}=F(b(\lambda)), \tag{4}$$

где $b(\lambda)$ – входной сигнал органа зрения в виде спектра излучения; $\overline{S}$ – выходной сигнал органа зрения в виде трехмерного вектора цвета; F – искомая функциональная зависимость выходного сигнала от входного. Исследования Ньютона, Ломоносова, Юнга, Максвелла, Гельмгольца и других авторов привели к построению трехкомпонентной теории цветового зрения, которую можно сформулировать следующим образом. Всевозможные излучения $b(\lambda)$, для которых совпадают тройки чисел B_1, B_2, B_3, вычисляемые по формулам:

$$B_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)m(\lambda)d\lambda, \quad B_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)n(\lambda)d\lambda,$$
$$B_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)p(\lambda)d\lambda. \tag{5}$$

порождают одинаковые цвета. Вместе с тем, излучения, для которых эти тройки различны, порождают различные цвета. В равенствах (5) $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ обозначают линейно независимые функции (т.н. *функции сложения*), определяемые для органа зрения экспериментально [1, с. 224]. Числа λ_1 и λ_2 обозначают соответственно наименьшее и наибольшее значения длины волны видимого диапазона спектра электромагнитных колебаний.

Как непосредственно следует из приведенной формулировки трехкомпонентной теории цветового зрения, вектор цвета $\overline{S}$ с компонентами S_1, S_2, S_3 связан некоторой взаимно однозначной вектор-функцией f с вектором $\overline{B}$, имеющим компоненты B_1, B_2, B_3:

$$\overline{S} = f(\overline{B}). \tag{6}$$

Конкретный вид зависимости f трехкомпонентной теорией цветового зрения не расшифровывается. Совокупность соотношений (5) и (6) можно рассматривать в качестве математической модели, описывающей вид искомого преобразования сигналов, осуществляемого органом зрения человека. Блок-схема этой модели изображена на рис. 1. В ней блоки 1_1, 1_2, 1_3 осуществляют вычисление линейных функционалов B_1, B_2, B_3 по формулам (6).

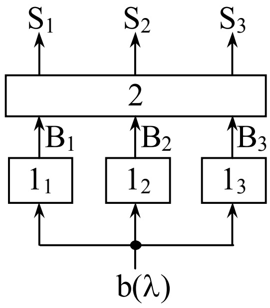

Рис. 1. Блок-схема модели

Блок 2 осуществляет некоторое взаимно однозначное преобразование (7) вектора $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3 в вектор $\overline{S}$ цвета зрительного ощущения с компонентами S_1 – светлотой, S_2 – насыщенностью, S_3 – цветовым тоном. Возникает вопрос, является ли эта модель всего лишь гипотезой, различные следствия которой подтверждаются в эксперименте, или же ее можно рассматривать как достоверный факт и, следовательно, она может быть логически выведена из прочно установленных экспериментальных законов, принимаемых в качестве аксиом. Многие авторы вводят эти уравнения прежде, чем рассматриваются экспериментальные факты, подтверждающие их справедливость. В этом случае соотношения (5), (6) фактически фигурируют в качестве гипотезы. Так сделано, например, в книге Мешкова [4, с. 101, 198]. Затем, основываясь на соотношениях (5) и (6), вводят понятие вектора цвета, понимая под ним вектор $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3. Далее вводят операции сложения цветов и умножения их на постоянные числа, а также понятие линейной зависимости цветов. Затем с помощью введенных понятий формулируются три закона смешения цветов (законы Грассмана [1]). Иногда эти три закона объединяют в один. Законы Грассмана служат тем основанием, на котором строится затем стройное здание колориметрии. Приведем один из вариантов формулировки *законов Грассмана*: *закон аддитивности* – суммы попарно равных цветов также суть равные цвета; *закон трехмерности* – любые четыре цвета линейно зависимы, однако существуют тройки линейно независимых цветов; *закон непрерывности* – непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета.

В то же время в литературе существует мнение, по-видимому, впервые высказанное в 1920 г. Шредингером, что из законов Грассмана в приведенной выше формулировке чисто логически вытекает *модель цветового зрения* в виде формул (5) и (6). В той же работе Шредингер дал вывод, доказывающий, по его мнению, это положение. Нюберг в работе [5, с. 158] пишет: «Обычно интегральные выражения цвета выводятся как следствие гипотезы Гельмгольца, но их возможно получить непосредственно из закона Грассмана, *не пользуясь никакой гипотезой* (курсив Нюберга). Это положение за недостатком места я оставляю без доказательства, которое можно найти в статье Шредингера». Однако выполненный нами анализ этого доказательства показал, что в его основе содержится ошибка «логического круга», делающая вывод неэффективным. Дело в том, что в качестве исходной посылки Шредингер использовал законы Грассмана, сформулированные с привлечением понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа.

Законы Грассмана

Выше было сказано, что использование понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа в неявной форме опирается на гипотетическую модель цветового зрения в виде соотношений (5) и (6). Следовательно, и законы Грассмана, сформулированные с использованием тех же понятий, зависят от этой гипотезы. Но в таком случае уместно поставить вопрос: могут ли законы Грассмана, опирающиеся на гипотезу, называться законами? Для того чтобы восстановить законы Грассмана в своих правах, необходимо их сформулировать без привлечения понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Приступая к решению этой задачи, мы будем пользоваться лишь операциями сложения излучений и умножения излучения на постоянные числа. Законность введения этих операций основана на хорошо изученных свойствах света и не зависит от каких-либо гипотез о виде преобразования сигналов в органе зрения.

Пусть имеются два поля сравнения, причем на одном из них сформировано излучение $b_1(\lambda)$, а на другом – $b_2(\lambda)$. При предъявлении этих зрительных картин в органе зрения возникают зрительные ощущения, характеризующиеся соответственно цветами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Для характеристики условий такого опыта удобно ввести функцию $\beta(\lambda)$, равную разности спектров излучений первого и второго полей сравнения:

$$\beta(\lambda) = b_1(\lambda) - b_2(\lambda). \quad (7)$$

Этой функции мы не приписываем никакого физического смысла. Она вводится лишь затем, чтобы с ее помощью можно было более изящно и кратко сформулировать законы Грассмана. Заметим, что каждой функции $\beta(\lambda)$ соответствует не одна, а бесчисленное множество пар излучений вида $b_1(\lambda)+\beta_0(\lambda)$, $b_2(\lambda)+\beta_0(\lambda)$, где $\beta_0(\lambda)$ – произвольная функция длины волны. Таким образом, прибавляя или вычитая (когда это возможно) на полях сравнения одинаковые излучения, мы не изменяем значения функции $\beta(\lambda)$. Важно также заметить, что в силу полной равноправности полей сравнения перемена излучений местами соответствует, по существу, одному и тому же опыту. Так что, если для пары излучений $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ наблюдается равенство цветов полей сравнения, то это равенство будет также наблюдаться и для пары излучений $b_2(\lambda)$, $b_1(\lambda)$.

Выводы

В статье проанализированы некоторые основные математические модели цветового зрения человека. Сравнивая новую формулировку законов Грассмана с прежней, можно видеть, что теперь в формулировке законов совершенно не участвуют операции сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. О цветах утверждается лишь то, что они равны или не равны между собой. Сознание наблюдателя используется при этом лишь как *нулевой прибор*, фиксирующий равенство или неравенство цветов двух зрительных ощущений. Важно заметить, что стандартные колориметрические опыты фактически выполняются в точности по той процедуре, которая необходима для демонстрации справедливости законов Грассмана в новой формулировке, поскольку в этих опытах операциям сложения и умножения на постоянные коэффициенты подвергаются именно излучения, а не цвета. Цвета же подвергаются единственной операции, состоящей в установлении их равенства или неравенства [1]. Наконец, необходимо заметить, что за отказ от использования операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа приходится расплачиваться более громоздкой формулировкой законов. Однако новая формулировка законов Грассмана, в отличие от прежней, свободна от каких-либо гипотез.

Список литературы

1. *Helmholtz H. Handbuch der physiologischen Optic / H. Helmholtz. – Hamburg u. Leipzig, 1909 – 1911.*
2. *Hering E. Die Lehre vom Lichtsinn / E. Hering. – 1874.*
3. *Ватсон Д.Н. Теория бесселевых функций: Пер. с англ. / Д.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, М, 1949.*
4. *Мешков В.В. Основы светотехники. Ч.2. / В.В. Мешков, А.Б. Матвеев. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 429 с.*
5. *Нюберг Н.Д. Математические основы задачи измерения цвета / Н.Д. Нюберг // В кн. Федорова Н.Т. Современное состояние колориметрии. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1933.*

Поступила в редколлегию 16.01.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ МЕХАНІЗМІВ КОЛІРНОГО ЗОРУ ЛЮДИНИ

О.В. Калініченко, В.О. Лещинський, В.П. Єпік, К.М. Яковенко

Розглянуто застосування апарата компараторної ідентифікації при моделюванні роботи зору людини. Досліджено моделі нижчої й вищої метрик кольору. Проаналізовано задачу математичного моделювання стаціонарних і однорідних процесів у зорі людини.

Ключові слова: *математичне моделювання зору, іррадіація, контраст, метрика кольору.*

MATHEMATICAL MODELS OF SOME MECHANISMS OF COLOUR SIGHT OF MAN

O.V. Kalinichenko, V.A. Leschinskiy, V.P. Epik, K.M. Yakovenko

Application of the device comparator identifications at modelling of the person sight work is considered. Models of the lowest and higher color metrics are investigated. The mathematical modelling problem of stationary and homogeneous processes in sight of the person is analysed.

Keywords: *mathematical design of sight, irradiation, contrast, birth-certificate of color.*