УДК 621.397

О.Ю. Ильин[1], А.Н. Королюк[2]

[1] *ГП «Центральный научно-исследовательский институт навигации и управления», Киев*
[2] *Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков*

ВЫБОР КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИНВАРИАНТНОСТИ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

В статье рассмотрены подходы направления выбора критериев оптимальности преобразований и инвариантности для различных ситуаций эксплуатации сложных систем управления. При этом результат использования выбора критерия зависит от выпуклых функций потерь, что дает возможность определить область инвариантности для сложных систем.

Ключевые слова: *критерий, оптимальность, преобразование, инвариантность, система.*

Введение и анализ предметной области

При проектировании информационно-измерительных и управляемых систем, обладавших структурной или информационной избыточностью, точностные и надежностные свойства существенно зависят от алгоритма преобразования сигналов. Обычно алгоритмы задаются эвристически, а при выбранных алгоритмах свойства системы характеризуется значением критерия качества. Ставятся и решаются задачи синтеза оптимальных алгоритмов, обеспечивающих экстремальные (максимальные или минимальные) значения критериев качества. Обычно при выборе критерия качества руководствуются не только (и не столько) существом решаемой задачи, спецификой требований и здравым смыслом, а соображениями удобства нахождения решения и традициями [1]. При это вопросы рационального выбора критериев обычно не обсуждается.

Между тем вид и свойства преобразований, оптимальных для различных критериев, могут значительно различаться. Очень важно установить взаимную зависимость между особенностями вида критерия качества и характерными свойствами соответствующих оптимальных преобразовании. Очень часто существенные свойства преобразований формулируются в терминах теории инвариантности [1]. Свойство инвариантности в различных формах появляется при использовании разных критериев оптимальности.

Постановка задачи. В работе проводится систематическое рассмотрение критериев оптимальности, для которых соответствующие преобразования обладают свойством инвариантности. Основные результаты приводятся для задачи оптимального определения полезного сигнала s по совокупности N результатов измерений $x_i = s + л_i$, $i = 1,...,N$, которые содержат аддитивные погрешности $л_i$. Такой постановке задачи соответствует схема измерения одного и того же сигнала s несколькими параллельно включенными приборами (в этом случае преобразование $z(x_1, x_2, ..., x_N)$ результатов измерении является безинерционным и осуществляется независимо для каждого момента времени), процедура многократного измерения одной и той же постоянной величины одним или несколькими приборами.

Изложение основного материала

Рассмотрим общие свойства алгоритмов, обладающих свойствами инвариантности в различных формах.

I. Оптимальные преобразования инвариантные по отношению к произвольному сдвигу результатов измерений.

Преобразование $z(x_1, x_2, ..., x_N)$ является инвариантным по отношению к сдвигу a, если

$$z(x_1+a, x_2+a, ..., x_N+a) = a + z(x_1, x_2, ..., x_N). \quad (1)$$

В частности при $x_i = s+л_i$ преобразование $z(x_1, x_2, ..., x_N)$ инвариантно по отношению к полезному сигналу

$$z(x_1, x_2, ..., x_N) = s+ z(n_1, n_2, ..., n_N).$$

Отсюда следует, что в результате инвариантного по отношению к сдвигу преобразования результатов измерений полезный сигнал воспроизводится без масштабных искажений, а преобразовании подвергаются погрешности $л_i$. При этом ошибка ε = zs оценки полезного сигнала не зависит от полезного сигнала и равна $z(n_1, n_2, ..., n_N)$.

Пользуясь основным свойством (1) инвариантных преобразовании, ножен представить их в виде

$$z(x_1, x_2, ..., x_N) = b+z(x_1–b, x_2–b, ..., x_N–b),$$

откуда следуют структурные особенности преобразования: инвариантное по отношению к полезному сигналу преобразование может быть построено на основе некоторого "базового" значения и функции, зависящей от отклонений от него всех результатов измерений. Например, при $b=x_j$, то функция зависит от разностей всех результатов измерений j-м результатом; если $b = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, то функция зависит от отклонений всех результатов измерений от выборочного среднего.

Условие инвариантности относительно сдвига выполняется для очень многих алгоритмов, предлагаемых и используемых вне связи с какими-либо критериями оптимальности.

На классе инвариантных по отношению к сдвигу преобразований можно строить оптимальные оценки полезного сигнала, используя при этом критерии оптимальности достаточно общего вида, но имевшие определенные структурные особенности.

Если известна плотность вероятности $f_s(x)$ полезного сигнала и плотности вероятности $f_i(x)$ погрешностей n_i, (они предполагаются взаимно статистически независимыми), то оптимальные байесовские оценки, минимизирующие средний риск, определяется из условия

$$\min_z \int_{-\infty}^{\infty} l(z-y) f_s(y) \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i - y)\, dy, \qquad (2)$$

где $l(y)$ – функция потерь. Однако получающиеся при этом оценки $z(x_1, x_2, ..., x_N)$, вообще говоря, не является инвариантными по отношению к сдвигу, и их ошибки зависят от полезного сигнала.

Критерий минимума среднего риске можно использовать и для построения оптимальных инвариантных оценок. Условие минимума среднего риска, которому соответствуют инвариантные оценки, выгладят следующим образом [1]

$$\min_z \int_{-\infty}^{\infty} l(z-y) \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i - y)\, dy. \qquad (3)$$

Важным обстоятельством здесь является то, что при этой не требуется знание априорных распределений полезного сигнала. Оптимальные, инвариантные по отношению к сдвигу, оценки, удовлетворявшие условию (3), называются оценками Питмэна.

Если законы распределения обрабатываемых величин неизвестны то, оптимальные инвариантные по отношению к сдвигу оценки можно строить на основе минимизации так называемого эмпирического среднего риска

$$F(z) = \sum_{i=1}^{N} l(x_i - z) \to \min_z. \qquad (4)$$

При дифференцируемой функции потерь l(y) оптимальная оценка определяется как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{N} l'(x_i - z) - 0. \qquad (5)$$

Если функция потерь недифференцируема или неоднозначна при некоторых значениях аргумента, то использование уравнения (5) возможно при специальном доопределении производной.

Нахождение оценки z в явном виде из уравнения (5) возможно лишь в частных случаях. Так, для квадратичного критерия уравнение (5) приводит к алгоритму осреднения величин x_j. При произвольной функции потерь минимизируемая функция может иметь несколько экстремумов, в этом случае за решение, естественно, следует принимать то значение z, при котором достигается глобальный минимум. Построение вычислительных процедур для нахождения решения не представляет принципиальных трудностей; дело сводится к одномерной задаче поиска глобального минимума. Если функция потерь выпуклая (не обязательно строго), то минимум функции F(z) – единственный. В этом случае вычислительные процедуры упрощаются. Кроме того, для преобразования величин x_j может быть использована аналоговая схема стандартного вида, построенная по принципу следящей системы, имеющий один выход и N входов, причем N сигналов рассогласований подаются на нелинейные элементы с характеристикой lr(y), и преобразованные таким образом сигнала суммируется на входе усилителя с большим коэффициентом усиления [2].

II. Инвариантность и надежность. Если сигналы x_j поступают от неабсолютно надежных приборов, которые в процессе работы могут отказать, то в совокупности значений $x_1, x_2, ..., x_N$ может оказаться часть недостоверных данных, соответствующих отказавшим приборам или приборам, дающим недопустимо большие погрешности.

В этой ситуации желательно строить преобразования, которые способны автоматически исключать, отбраковывать недостоверные данные. Такие преобразования должны быть инвариантными по отношению к некоторым сигналам из совокупности $x_1, x_2, ..., x_N$.

Если сигналы отказавших приборов наверняка исключаются и преобразование будет производиться под результатами, поступившими только от исправных приборов, то тем самым будет обеспечена надежная оценка полезного сигнала.

В классической теории надежности один из основных методов резервирования – резервирование замещением – предполагает реализации принципа инвариантности относительно сигналов всех приборов, кроме одного. При этом явно или неявно предполагается, что сведения о текущем состоянии прибора, сигнал которого используется, поступает от аппаратуры контроля, достоверно и оперативно обнаруживающий отказ. При отказе прибора преобразование становится инвариантным относительно его выходного сигнала. Таким образом, обычное резервирование замещением реализует инвариантность, управляемую по сигналам внешних источников информация.

Для практики очень важны случаи, когда средства автоматического контроля состояний приборов отсутствуют. При этом о состоянии прибором можно косвенно судить лишь по соотношениям значений их выходных сигналов. В этих условиях достаточно простые и надежные оценки полезного сигнала могут быть построены на классе преобразований, основанных на порядковых статистиках, соответствующих совокупности результатов измерений. Порядковые статистики формируются следующим образом. Исходная совокупность N результатов измерений $x_1, x_2, ..., x_N$ упорядочивается, например, по неубыванию. В результате получаем новую упорядоченную совокупность $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(N)}$, называемую вариационным рядом, причем $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq, ..., \leq x_{(N)}$. Члены этого ряда называются порядковыми статистиками. Величина $x_{(1)}$, занимающая первое место в вариационном ряду, называется 1-й порядковой статистикой, а номер ее рангом. Крайние порядковые статистики $x_{(1)}$ и $x_{(N)}$ соответствуют экстремальным значениям исходной неупорядоченной совокупности. Средний член вариационного ряда (центральная порядковая статистика) $x_{(h-1)}$ при N=2h+1 называется выборочной медианой. Отметим, что если в исходной совокупности индексы величин x_j соответствует номерам приборов, с которых они поступают, то в вариационном ряду величины x_j пронумерованы в соответствии с их относительными значениями в порядке неубывания.

Для вариационного ряда характерно то, что недостоверные данные, содержащие большие ошибки (если таковые имеются) располагаются на краях вариационного ряда, и им соответствуют крайние порядковые статистики. В то же время данные, поступающие от исправных приборов к отличавшиеся друг от друга из-за погрешностей обычно невысокого уровня, располагаются в центральной части вариационного ряда, и им соответствуют центральные порядковые статистики.

Исходя из такого представления, можно строить различные эвристические алгоритмы, обеспечивающие надежность оценивания при отказе не более некоторого заданного числа приборов. В частности, если в совокупности N обрабатываемых данных возможно не более $r \leq \left[\dfrac{N-1}{2}\right]$ недостоверных данных, поступивших от отказавших приборов, то надежность оценки будет гарантирована, если отбросить r каямешьших и r наибольших крайних порядковых статистик и подвергнуть преобразованию оставшиеся центральные порядковые статистики, например, осреднить их в общем случае с весовыми коэффициентами c_i

$$z = \sum_{i=r+1}^{N-r} c_i x_{(i)}; \quad \sum_{i=r+1}^{N-r} c_i = 1 . \qquad (6)$$

Это преобразование инвариантно относительно r наименьших и r наибольших значений сигналов в совокупности $x_1, x_2, ..., x_N$.

Если требуется построить оценку, нечувствительную к отказам менее половины из N приборов, когда при отказах сигналы могут отклоняться в любую сторону, то при нечетном N = 2h+1 необходимо в качестве оценки использовать только одну порядковую статистику - выборочную медиану

$$z = \operatorname{med}\{x_1, x_2, ..., x_N\} = x_{(h+1)}, \qquad (7)$$

реализуемую мажоритарным преобразованием. Это преобразование инвариантно относительно $h = \left[\dfrac{N-1}{2}\right]$ максимальных и h минимальных сигналов в совокупности $x_1, x_2, ..., x_N$.

В некоторых случаях, целесообразно использовать не выборочную медиану, а какую-либо другую порядковую статистику

$$z = x_{(i)}, \quad i = 1, 2, ..., N . \qquad (8)$$

Это преобразование инвариантно относительно (i-1) минимальных и (N–i) максимальных сигналов в совокупности $x_1, x_2, ..., x_N$. Формально функции вида (8) относятся к классу так называемых функций, принимающих значения своих аргументов.

Рассмотрим теперь преобразования (6) – (8) с другой точки зрения.

Нетрудно показать, что преобразования (7) и (8), предусматривающие выбор одной из порядковых статистик с одновременным (отбрасыванием остальных, удовлетворяют критерию оптимальности (4) и выпуклой кусочно-линейной функцией потерь $l(y)$.

В частности, преобразование (8) является оптимальным по критерию (1) с функцией потерь

$$l(y) = \begin{cases} A_y \text{ при } y \geq 0, \\ B_y \text{ при } y < 0. \end{cases} \qquad (9)$$

где A и B – положительные константы такие, что

$$\frac{N-i}{i} < \frac{B}{A} < \frac{N-i+1}{i-1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, ..., N$$

или (10)

$$\frac{i-1}{N-i+1} < \frac{A}{B} < \frac{i}{N-i} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, ..., N-1 .$$

Выборочная медиана

$$z = \operatorname{med}\{x_1, x_2, ..., x_N\} = x_{(h+1)}$$

являются оптимальной оценкой, определяемой по методу наименьшее модулей

$$\min_z \sum_{i=1}^{N} |x_i - z|, \quad N = 2h+1.$$

Выборочная медиана получается как оптимальная оценка из условия (4) и в более общей ситуации, когда в функции потерь (9) коэффициенты A и B удовлетворяют соотношению

$$\frac{h}{h+1} < \frac{B}{A} < \frac{h+1}{h}.$$

Таким образом, можно утверждать, что оценкам $z = x_{(i)}$, инвариантным относительно $(i-1)$ минимальных и $(N-i)$ максимальных значений в совокупности обрабатываемых данных, соответствует критерий оптимальности вида (4) с выпуклыми кусочно-линейными функциями потерь (9).

Естественно поставить вопрос о том, при каком выборе функции $l(y)$ преобразование реализует функции, принимающие значения своих аргументов, т.е. имеет место инвариантность результата преобразования относительно $(N-1)$ выходных сигналов приборов. Можно показать, что необходимым условием этого является разрыв производной функции потерь $l(y)$ при $y = 0$. При гладких функциях потерь свойство инвариантности может иметь место относительно меньшего числе данных

В случаю, когда оценки строятся в результате преобразования нескольких соседних порядковых статистик о фиксированными рангами (оценка вида (6)), указать соответствующий критерий оптимальности, по-видимому, не представляется возможным. Однако можно построить критерий типа (4), которые обеспечивают соответствующим им оптимальным оценкам свойство инвариантности по отношению к резко выпадающим из составной совокупности данных, что проявляется в отбрасывании некоторого числа крайних порядковых статистик. При чем число отбрасываемых крайних значений не фиксировано и измеряется от реализации к реализации в зависимости от числа недостоверных данных в результатах измерений. Такого рода инвариантные оценки дают критерии оптимальности (4) с нестрого выпуклыми непрерывными функциями потерь вида [2]

$$l(y) = \begin{cases} a_1 y + b_1 & \text{при} \quad y < y_1; \\ \psi(y) & \text{при} \quad y_1 < y < y_2; \\ a_2 y + b_2 & \text{при} \quad y > y_2, \end{cases} \qquad (11)$$

где $\psi(y)$ – строго выпуклая функция; $a_1>0$, $a_2>0$.

Сами оптимальные инвариантные оценки определяются в результате решения уравнения (5), в котором функция $l\text{r}(y)$ является неубывающей функцией с двусторонними ограничениями [2].

III. Инвариантность относительно формы законов распределения обрабатываемых сигналов. Вид оптимальных оценок, удовлетворяющих условию (4), зависит от вида используемой функции потерь, а качество этих оценок, в частности, их точность, зависит также и от законов распределения результатов измерении $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Однако, как правило, на практике законы распределения либо совсем не известны, либо известны не точно. Особенно малодостоверными является сведения о поведении "хвостов" законов распределения, т.е. как раз тех участков, которые описывают маловероятные события. Зачастую используют аналитические выражения функций распределения, получаемые на основе экстраполяции более или менее достоверных сведений о поведении центральных участков функции на "хвосты" (например, модель нормального распределения). Однако в действительности, преимущественно при обработке данных, поступающих от неабсолютно надежных приборов, может существовать повышенная вероятность больших значений погрешностей, что выражается в растянутости "хвостов" функций распределения. При этом отсутствуют достоверные сведения о поведении "хвостов".

В этих условиях желательно строить оптимальные оценки так, чтобы их точность возможно меньше зависела от свойств больших значений погрешностей, т.е. от поведения "хвостов" распределений. Иными словами, оценки должны быть инвариантными (или мало чувствительными) к форме "хвостов" законов распределения.

Плотности распределения с растянутыми "хвостами" удобно представлять в виде смеси

$$f(x) = (1-a) f_1(x) + a f_2(x), \qquad (12)$$

где $f_1(x)$ – плотность распределения с дисперсией σ_1^2; $f_2(x)$ – плотность распределения с дисперсией σ_2^2, $0 \le a < 1$; $\sigma_1^2 << \sigma_2^2$ и $a<<1$ – плотность $f_2(x)$ определяет форму "хвостов", а $f_1(x)$ – форму центральной часта плотности $f(x)$.

При обработке конечного числа N результатов измерений оптимальные оценки, удовлетворяющие условию (4), всегда будут испытывать влияние функции $f_2(x)$ на точность оценок, но это влияние будет более или менее существенным в зависимости от вида функции потерь $l(y)$. Однако можно указать класс функции потерь, которые обеспечивают в асимптотике при $N\to\infty$ полную инвариантность (нечувствительность) точности оценки к виду и параметрам плотности $f_2(x)$.

Известию, что при выпуклых функциях потерь $l(y)$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям [3, 4], оценка, оптимальности по критерию (4), является асимптотически нормальной с дисперсией

$$\sigma_2^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} l'^2(y) f(y) dy}{N\left[\int_{-\infty}^{\infty} l''(y) f(y) dy\right]^2}. \qquad (13)$$

Легко показать, что при нестрого выпуклых функциях потерь вида (11) асимптотическая дисперсия (13) может полностью не зависеть от вида и параметров плотности $f_2(x)$ в смеси (12). Так, например, при симметричных плотностях $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и при четной функции потерь (11), в которой $a_1^2 = a_2^2$, а также при дополнительном предположении, что $f_2(x) = 0$ при $y_1 < x < y_2$ асимптотическая дисперсия (13) принимает вид

$$\sigma_2^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} l'^2(y) f(y) dy}{N\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} l''(y) f(y) dy\right]^2}, \qquad (14)$$

т.е. получилась полная не чувствительность асимптотической дисперсии к плотности $f_2(x)$, характеризующей "хвосты" плотности $f(x)$.

При обработке конечного числа N данных оптимальные оценки, удовлетворяют критерию (4) с некоторого выпуклыми функциями потерь вида (11), обладают значительно меньшей чувствительностью к "хвостам" распределений, чем оценки, получаемые при строго выпуклых функциях $l(y)$, например, при $l(y) = y^2$.

Выводы

Таким образом, оценки, которые строится из условия (4) с нестрого выпуклыми функциям потерь, являются инвариантными по отношению к произвольному сдвигу в результатах измерении, инвариантными по отношению к резко выпадающим недостоверным результатам и обладают малой чувствительностью к поведению "хвостов" функций распределения результатов измерений.

Использование критериев с некоторого выпуклыми функциями потерь дает возможность получать преобразования, обладающие свойством инвариантности относительно части входных данных и обеспечивающие поэтому при определенных условиях исключение результатов отказов в тех случаях, когда эвристический подход к конструированию алгоритмов представляется малоэффективным.

Так, использование метода наименьших модулей при обработке результатов совокупных измерений, когда определению подлежит совокупность скалярных величин - вектор полезного сигнала, в конечном счете приводит к отбрасыванию, исключению части результатов измерений, т.е. к инвариантности относительно них результата преобразования. При этом алгоритм преобразования не записывается в виде совокупности уравнений (как при использовании, например, метода наименьший; квадратов), а реализуется в виде процедур организованного или неорганизованного перебора, что удобно при решении задач на ЭВМ. Применение модульного критерия оптимальности позволило также обеспечивать надежность в целой серия других задач преобразования результатов измерений и статистической обработки.

Список литературы

1. Ільїн О.Ю. Аналіз побудови інваріантних каналів передачі дискретної інформації / О.Ю. Ільїн // Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. – К.: ЦНДІ НіУ, 2009. – Вип. 1 (9). – С. 192-195.

2. Ільїн О.Ю. Алгоритм обнаружения сигнала, инвариантного к распределению нестационарных помех / О.Ю. Ільїн, С.И. Васюхно // Системи озброєння і військова техніка. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 4 (28). – С. 66-68.

3. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория / Под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: ЗАО МАКВИС, 1998. – 828 с.

4. Окунев Ю.Б. Системы святи с инвариантными характеристиками помехоустойчивости / Ю.Б. Окунев. – М.: Связь, 1973. – 80 с.

Поступила в редколлегию 15.02.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка, Полтава.

ВИБІР КРИТЕРІЇВ ОПТИМАЛЬНОСТІ ПЕРЕТВОРЕНЬ І ІНВАРІАНТНОСТІ В СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ

О.Ю. Ільїн, О.М. Королюк

У статті розглянуті підходи напряму вибору критеріїв оптимальності перетворень і інваріантності для різних ситуацій експлуатації складних систем управління. При цьому результат використання вибору критерію залежить від опуклих функцій втрат, що дає можливість визначити область інваріантності для складних систем.

Ключові слова: *критерій, оптимальність, перетворення, інваріантність, система.*

CHOICE OF CRITERIA OF OPTIMUMNESS OF TRANSFORMATIONS AND TO INVARIANCE IN DIFFICULT SYSTEMS

O.Yu. Il'in, A.N. Korolyuk

In the article approaches of direction of choice of criteria of optimumness of transformations and invariance are considered for the different situations of exploitation of the difficult control systems. Thus the result of the use of choice of criterion depends on the protuberant functions of losses, that enables to define the area of invariance for the difficult systems.

Keywords: *criterion, optimumness, transformation, invariance, system.*