

УДК 004.8 : 621.3

С.Г. Семенов<sup>1</sup>, В.В. Босько<sup>2</sup>, І.А. Березюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*

<sup>2</sup> *Кировоградский национальный технический университет, Кировоград*

## ИССЛЕДОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТНО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МУЛЬТИСЕРВИСНОГО КАНАЛА СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА GERT-СЕТИ

*В статье представлены результаты исследований варианта экспоненциальной GERT-сети (сети, ветви которой характеризуются экспоненциальными распределениями) для моделирования вероятностно-временных характеристик мультисервисного канала связи. Найдено аналитическое выражение для оценки плотности распределения вероятности времени доставки сообщения. Построены и проанализированы графики функции распределения и плотности распределения вероятностей случайной величины времени доставки сообщения. Выявлены достоинства и недостатки математической модели мультисервисного канала связи с помощью GERT-сети.*

**Ключевые слова:** GERT-сеть, математическая модель, время доставки сообщения, мультисервисный канал связи.

### Введение

В настоящее время современную науку тяжело представить без аппарата математических знаний, а широкое применение математических моделей в значительной степени упрощает процесс разработки и внедрения сложных технических средств с заданными параметрами и характеристиками.

В связи с быстрым и динамичным развитием микропроцессорной и микроконтроллерной техники телекоммуникационных систем (ТКС), появлением новых методов, алгоритмов и средств обработки и передачи данных особенно актуальной представляется задача математического моделирования телекоммуникационных систем и сетей.

**Анализ литературы и постановка проблемы.** Проведенный анализ методов математического моделирования, представленных в [2, 3], показал, что одним из наиболее наглядных и многосторонних форм описания телекоммуникационных сетей (ТКС) является графовая форма. При этом совокупность алгоритмов, синтезированных в единое целое по перерабатываемой информации, удобнее представлять в виде графа алгоритмов телекоммуникационных систем и сетей.

Под графом алгоритмов ТКС понимается оргграф  $G = \{X, U\}$ , вершины  $x_i$  которого отображают частные реализации  $i$ -х алгоритмов системы [3, 5]. Вершинам графа присваивается некоторое значение, соответствующее весу в форме определенных физических величин, связанных с реализацией алгоритмов. Такими физическими величинами могут выступать: время реализации алгоритма; объем памяти, необходимый для выполнения алгоритма; веро-

ятность попадания на любой выход системы; ошибки определения статистических величин, связанных с реализацией алгоритма, и т.д.

Граф алгоритмов (ТКС) может быть представлен и в форме, в которой частные реализации алгоритмов связываются с дугами графа.

В статье [2] была разработана математическая модель мультисервисного канала связи на основе экспоненциальной GERT-сети, а также получены аналитические выражения для расчета произвольных функции распределения  $\Phi(z)$  и плотности распределения  $\phi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения. Кроме того, в статье [2] выдвинуты и доказаны ряд положений, ограничивающих пространство решений уравнений и упрощающих процесс математического моделирования ТКС с использованием GERT-сетей.

Исследуем изменения вероятностно-временных характеристик (ВВХ) мультисервисного канала связи в различных режимах функционирования (информационного обмена).

### Основная часть

GERT-модель алгоритма передачи сообщения в мультисервисном канале связи приведена на рис. 1.

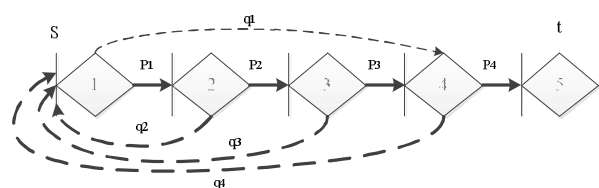


Рис. 1. GERT-модель алгоритма передачи сообщения в мультисервисном канале связи

**1. Исследования изменений ВВХ мультисервисного канала связи в режиме доминирования ТСП-соединений.**

Рассмотрим пример информационного обмена в мультисервисном канале связи для случая доминирования ТСП-соединений над трафиком UDP.

С учетом условия, что мультисервисный канал связи может работать в режиме уничтожения устаревших кадров, превысивших время передачи, в соответствии с полученными в [2] аналитическими выражениями для расчета произвольных функции распределения  $\Phi(z)$  и плотности распределения  $\varphi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения:

$$\Phi(z) = \frac{uz^3 + wz^2 + vz + h}{(\lambda_1 + z)(\lambda_3 + z)(\lambda_4 + z)(z^3 + sz^2 + rz + c)}, \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^6 \frac{e^{zx} (uz_k^3 + wz_k^2 + vz_k + h)}{6z_k^5 + 5g_5z_k^4 + 4g_4z_k^3 + 3g_3z_k^2 + 2g_2z_k + g_1}, \quad (2)$$

где  $u = q_1\lambda_1$ ,  $w = q_1\lambda_1(\lambda_2 + 2\lambda_3)$ ,

$$v = \lambda_3(q_1\lambda_1(2\lambda_2 + \lambda_3) + p_1p_2p_3\lambda_2\lambda_3),$$

$$h = \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2(q_1 + p_1p_2p_3), \quad s = 2\lambda_3 + \lambda_2 - \frac{q_1q_4\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1 + z},$$

$$r = \lambda_3 \left( \frac{\lambda_3 + 2\lambda_2 - p_1q_2\lambda_2\lambda_3 - \frac{q_1q_4\lambda_1\lambda_3(\lambda_3 + \lambda_2)}{\lambda_1 + z} - \frac{p_1p_2q_3\lambda_2\lambda_3^2}{\lambda_3 + z}}{\lambda_3 + z} \right),$$

$$c = \lambda_2\lambda_3^2 \left( 1 - p_1q_2 - \frac{q_1q_4\lambda_1}{\lambda_1 + z} - \frac{p_1p_2\lambda_3(q_3 + q_4)}{\lambda_3 + z} \right),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^6 \operatorname{Res}_{z=z_k} (e^{zx}\Phi(z)) = \frac{e^{(a+bi)x} \times (u(a+bi)^3 + w(a+bi)^2 + v(a+bi) + h)}{6(a+bi)^5 + 5g_5(a+bi)^4 + 4g_4(a+bi)^3 + 3g_3(a+bi)^2 + 2g_2(a+bi) + g_1} - \frac{e^{(a-bi)x} \times (u(a-bi)^3 + w(a-bi)^2 + v(a-bi) + h)}{6(a-bi)^5 + 5g_5(a-bi)^4 + 4g_4(a-bi)^3 + 3g_3(a-bi)^2 + 2g_2(a-bi) + g_1}. \quad (3)$$

Из [4] известно, что сумма значений любой дробно-рациональной функции

$$f(z) = \frac{d_m z^m + d_{m-1} z^{m-1} + \dots + d_1 z + d_0}{\ell_m z^m + \ell_{m-1} z^{m-1} + \dots + \ell_1 z + \ell_0},$$

$d_m \neq 0, \ell_m \neq 0$

исследуемой при значениях комплексных сопряженных аргументов, может быть представлена в виде:

$$(\tau + i\beta/(\gamma + i\delta)) + (\tau - i\beta/(\gamma - i\delta)),$$

где  $\tau, \beta, \gamma, \delta$  – некоторые коэффициенты.

Используя выражения Эйлера [4], получим:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^6 \operatorname{Res}_{z=z_k} (e^{zx}\Phi(z)) = e^{(a+bi)x} \times (\tau + i\beta/(\gamma + i\delta)) +$$

$$g_5 = s + \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$g_4 = r + s(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$g_3 = c + r(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + s(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) + \lambda_1\lambda_3\lambda_4,$$

$$g_2 = s(\lambda_1\lambda_3\lambda_4) + r(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) + c(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4),$$

$$g_1 = r(\lambda_1\lambda_3\lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$g_0 = c(\lambda_1\lambda_3\lambda_4),$$

$p_1 - p_4$  – вероятности успешного выполнения процедур алгоритма, соответствующих дугам графа GERT-сети (см. рис. 1),

$\lambda_1 - \lambda_4$  – условные интенсивности, характеризующие соответствующие дуги графа,

а также, используя характерные для ТСП-соединения, признаки ветвей GERT-модели ( $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $\lambda_2 \approx \lambda_3 \approx \lambda_4$ ,  $p_3 \approx p_4$ ) исследуем ВВХ мультисервисного канала связи.

Найдем плотности распределения  $\varphi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения при условии, что  $z$  выбираются как корни уравнения  $(\lambda_1 + z)(\lambda_3 + z)(\lambda_4 + z)(z^3 + sz^2 + rz + c) = 0$ , условные вероятности и интенсивности в ветвях GERT-сети имеют значения:  $p_1 = 0,8$ ,  $p_2 = 0,9$ ,  $p_3 = p_4 = 0,99995$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,91$ ,  $\lambda_4 = 0,93$ , а интенсивность  $\lambda_1$  принимает значения:

- 1)  $\lambda_1 = 0,17$ ; 2)  $\lambda_1 = 0,25$ ; 3)  $\lambda_1 = 0,35$ .

С учетом приведенных признаков GERT-сети, а также в соответствии с выражением (2), получим:

$$+e^{(a+bi)x} \cdot (\tau - i\beta/(\gamma - i\delta)) = \left( 2e^{ax} / (\gamma^2 + \delta^2) \right) \times ((\tau\gamma + \beta\delta)\cos(bx) + (\tau\gamma - \beta\delta)\sin(bx)), \quad (4)$$

где  $\tau = a^3u - 3ab^2 + a^2w - b^2w + av + h$ ,

$$\beta = 3a^2bu - b^3u + 2abw + bv,$$

$$\gamma = 6a^5 - 12a^3b^2 + 6b^5 + 5g_5a^4 - 30g_5a^2b^2 + 5g_5b^4 + 4g_4a^3 - 12g_4ab^2 + 3g_3b^2 + 2g_2a + g_1,$$

$$\delta = 18a^4b - 60a^2b^3 + 3ab^4 + 20g_5a^3b - 20g_5ab^3 + 12g_4a^2b - 4g_4b^3 + 6g_3ab + 2g_2b.$$

На рис. 2 и 3 представлены ансамбли кривых произвольной функции распределения  $\Phi(x)$  и плот-

ности распределения  $\Phi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения для приведенных выше условий.

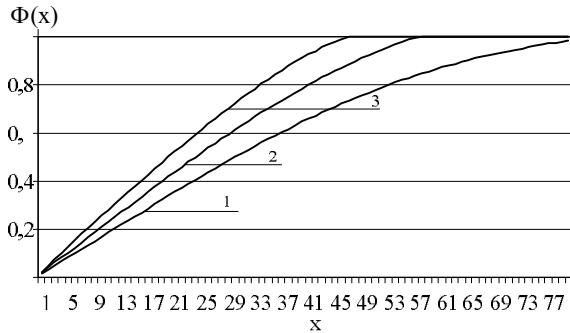


Рис. 2. График произвольной функции распределения  $\Phi(x)$  времени передачи сообщения в мультисервисном канале связи в режиме доминирования TCP-соединений

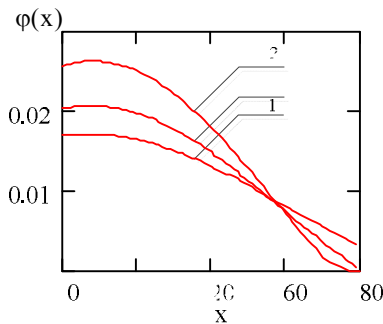


Рис. 3. График произвольной плотности распределения  $\Phi(x)$  вероятности времени передачи сообщения в режиме доминирования TCP-соединений

Внешний вид кривых графиков рис. 2 и 3 дает основания предположить, что случайная величина времени передачи сообщения в мультисервисном канале связи в режиме доминирования TCP-соединений имеет гамма-распределение. Проверим эту гипотезу по критерию  $\chi^2$  Пирсона [1]:

$$\chi^2 = N^* \sum_{i=1}^k (P_i^* - P_i)^2 / P_i,$$

где  $k$  – число разрядов (интервалов) статистического ряда;  $P_i^*$  и  $P_i$  – «статистическая» и теоретическая вероятности события.

В результате эксперимента были получены теоретические значения  $\chi^2$  и табличное значение  $\bar{\chi}^2$ , обратное правосторонней вероятности распределения  $\chi^2$ .

Проведенная проверка показала, что выдвинутую гипотезу можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей полученным при математическом моделировании результатам. Это подтверждается тем, что при достаточно большом значении доверительной вероятности  $Q = 0,95$  для всех рассматриваемых  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 0,17$ ;  $\lambda_1 = 0,25$ ;  $\lambda_1 = 0,35$ ) соответствующие значения

$\chi^2$  ( $\chi_1^2 = 19,3$ ,  $\chi_2^2 = 15,1$ ,  $\chi_3^2 = 13,2$ )  $\ll \bar{\chi}^2 = 101,9$  позволяют признать расхождения между «статистическими» ( $P_i^*$ ) и теоретическими ( $P_i$ ) вероятностями наступления события несущественными.

**2. Исследования изменений ВВХ мультисервисного канала связи в режиме доминирования UDP-соединений.**

Рассмотрим пример информационного обмена в мультисервисном канале связи для случая доминирования UDP-соединений над трафиком TCP, при этом аналогично предыдущему примеру, для определения функции распределения  $\Phi(x)$  и плотности распределения  $\Phi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения используем аналитические выражения (1) – (4), а также учитываем характерные для UDP-соединения признаки ветвей GERT-модели ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ,  $\lambda_3 \approx \lambda_4$ ,  $p_3 \approx p_4$ ).

На рис. 4 и 5 представлены ансамбли кривых произвольной функции распределения  $\Phi(x)$  и плотности распределения  $\Phi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения для условий:  $p_1 = 0,01$ ,  $p_2 = 0,9$ ,  $p_3 = p_4 = 0,99995$ ,  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0,91$ ,  $\lambda_4 = 0,93$ . Интенсивность  $\lambda_1$  принимает значения:

- 1)  $\lambda_2 = 0,17$ ; 2)  $\lambda_2 = 0,25$ ; 3)  $\lambda_2 = 0,35$ .

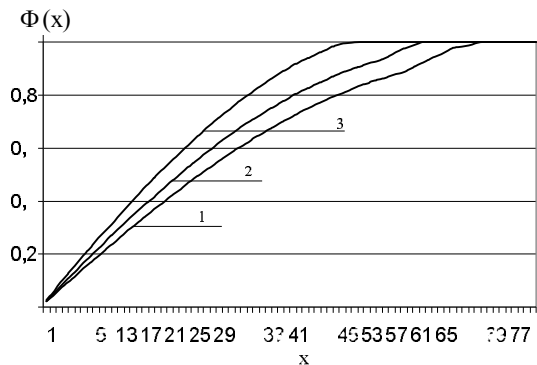


Рис. 4. График произвольной функции распределения  $\Phi(x)$  времени передачи сообщения в мультисервисном канале связи в режиме доминирования UDP-соединений

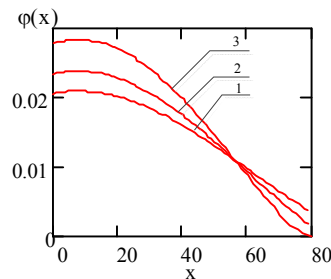


Рис. 5. График произвольной плотности распределения  $\Phi(x)$  вероятности времени передачи сообщения в режиме доминирования UDP-соединений

Внешний вид кривых графиков рис. 4 и 5 аналогично предыдущему примеру дает основания предположить, что случайная величина времени передачи сообщения в мультисервисном канале связи в режиме доминирования UDP-соединений имеет гамма-распределение. Это подтверждается тем, что при значении доверительной вероятности  $Q = 0,95$  для всех рассматриваемых  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 = 0,17$ ;  $\lambda_2 = 0,25$ ;  $\lambda_2 = 0,35$ ) соответствующие значения  $\chi^2$  равны ( $\chi_1^2 = 16,6$ ,  $\chi_2^2 = 14,2$ ,  $\chi_3^2 = 11,8$ ). Эти значения, как и в предыдущем рассматриваемом примере, много меньше  $\overline{\chi^2} = 101,9$ .

Это подтверждается тем, что при значении доверительной вероятности  $Q = 0,95$  для всех рассматриваемых  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 = 0,17$ ;  $\lambda_2 = 0,25$ ;  $\lambda_2 = 0,35$ ) соответствующие значения  $\chi^2$  равны ( $\chi_1^2 = 16,6$ ,  $\chi_2^2 = 14,2$ ,  $\chi_3^2 = 11,8$ ). Эти значения, как и в предыдущем рассматриваемом примере, много меньше  $\overline{\chi^2} = 101,9$ .

### Выводы

Таким образом, анализ графиков ВВХ (рис. 2 – 5) показал, что в заданных режимах функционирования мультисервисного канала связи функции распределения  $\Phi(x)$  и плотности распределения  $\varphi(x)$  вероятностей времени передачи сообщения обладают схожими свойствами (случайная величина времени передачи сообщения имеет гамма-распределение).

Проведенные исследования математической модели мультисервисного канала связи на основе экспоненциальной GERT-сети позволили выявить ряд ее достоинств:

– полученные, в результате математического моделирования выражения удобны для дальнейших математических действий, выполняемых при анализе процессов передачи информации и исследовании систем со старением заявок с учетом разнородности трафика и гетерогенности структуры ТКС;

– математическая модель позволяет определить функции распределения и плотности распределения случайных величин на различных этапах функционирования ТКС.

К недостаткам представленной модели можно отнести необходимость вычисления полюсов  $z$  мероморфной функции  $\Phi(z)$ , что в значительной степени усложняет процесс моделирования.

### Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
2. Семенов С.Г. Математическая модель мультисервисного канала связи на основе экспоненциальной GERT-сети / С.Г. Семенов, Е.В. Мелешко, Я.В. Илюшко // Системи озброєння і військова техніка: науковий журнал. – 2011. – № 3(27). – С. 64-67.
3. Шибанов А.П. Обобщенные GERT-сети для моделирования протоколов, алгоритмов и программ телекоммуникационных систем: дис. ... доктора техн. наук: 05.13.13 / Шибанов Александр Петрович. – Рязань, 2003. – 307 с.
4. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел / Г. Эдвардс. – М.: Мир, 1980. – 486 с.
5. Pritsker A.A.B. GERT: Graphical Evaluation and Review Technique. Part I. Fundamentals / A.A.B. Pritsker, W.W. Happ // The Journal of Industrial Engineering (May 1966).

Поступила в редколлегию 3.02.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В. А. Краснобаев, Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка, Полтава.

### ДОСЛІДЖЕННЯ ІМОВІРНІСНО-ТИМЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК МУЛЬТИСЕРВИСНОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ GERT-МЕРЕЖІ

С.Г. Семенов, В.В. Босько, І.А. Березюк

У статті представлені результати досліджень варіанту експоненціальної GERT-мережі (мережі, гілки якої характеризуються експоненціальними розподілами) для моделювання імовірнісно-тимчасових характеристик мультисервисного каналу зв'язку. Знайдений аналітичний вираз для оцінки щільності розподілу вірогідності часу доставки повідомлення. Побудовані і проаналізовані графіки функції розподілу і щільності розподілу вірогідності випадкової величини часу доставки повідомлення. Виявлені достоїнства і недоліки математичної моделі мультисервисного каналу зв'язку за допомогою GERT-мережі.

**Ключові слова:** GERT-мережа, математична модель, час доставки повідомлення, мультисервисний канал зв'язку.

### RESEARCHES OF PROBABILISTIC-TEMPORAL DESCRIPTIONS OF MULTISERVICE COMMUNICATION CHANNEL WITH THE USE OF MATHEMATICAL TOOL OF GERT-NETWORK

S.G. Semenov, V.V. Bos'ko, I.A. Berezyuk

In the article the results of researches of variant of exponential GERT-network (the network the branches of which are characterized the exponential distributing) are presented for the design of probabilistic-temporal descriptions of multiservice communication channel. Analytical expression is found for the estimation of closeness of distributing of probability of time of delivery of report. Built and analysed the graphs of function of distributing and closeness of distribution of probabilities of casual size of time of delivery of report. Dignities and lacks of mathematical model of multiservice communication channel are exposed by a GERT-network.

**Keywords:** GERT-network, mathematical model, time of delivery of report, multiservice communication channel.