УДК 621.396.96

В.А. Васильєв, І.І. Сачук, С.В. Селезньов, А.С. Чопенко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

СТРУКТУРА ПРОСТОРУ ОЗНАК ТА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ЙМОВІРНОСТІ ПРАВИЛЬНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ ПРИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ РУХУ ОБ'ЄКТА ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Проаналізовано структуру простору ознак та отримано вирази для розрахунку ймовірності правильного прийняття рішення про середні значення складових вектора прискорення об'єкта.

Ключові слова: *багатоальтернативний підхід, ідентифікація, структура простору ознак, ймовірність правильного прийняття рішення.*

Вступ

Згідно з теорією оптимальної фільтрації: чим адекватніша модель руху об'єкта його дійсному руху, тим точніше можна оцінити стан об'єкту [1, 2]. Основою для побудови моделі руху об'єкта є другий закон Ньютона та кінематичні рівняння, що пов'язують між собою вектори прискорення, швидкості та положення об'єкта. У зв'язку із складністю розрахунку результуючої сили, що діє на об'єкт, та залежності її для пілотуємих об'єктів від дій льотчика в більшості практичних випадків модель руху об'єкта будують на основі статистичної моделі прискорення об'єкта, що відображає особливості його можливого змінювання. При використанні багатоальтернативної моделі руху маневруючого об'єкта [3] складові вектора прискорення припускаються взаємно незалежними експоненціально корельованими випадковими процесами. Кожна μ-а складова вектора прискорення w_μ вважається розподіленою за нормальним законом з відомим середньоквадратичним відхиленням σ_{w_μ} та невідомим математичним очікуванням, відносно якого вводиться фіксована кількість гіпотез $H_i : m_{w_\mu} = m_{w_{\mu_i}}$. У цьому випадку виникає необхідність ідентифікації моделі руху об'єкта: прийняття рішення про середні значення складових вектора прискорення об'єкту.

Розв'язання задачі синтезу радіотехнічної слідкуючої системи на основі багатоальтернативної моделі руху об'єкта [3] та стандартної моделі спостережень призводить до оптимального байєсовського алгоритму оцінювання та алгоритмів оцінювання за максимумом апостеріорної щільності гіпотез і за максимумом функцій правдоподібності. Якість алгоритму оцінювання за максимумом функції правдоподібності характеризується ймовірністю правильного прийняття рішення про середні значення складових вектора прискорення (ймовірністю правильної ідентифікації моделі руху). Для її розрахунку необхідно, виходячи з розподіляючих функцій алгоритму, з'ясувати структуру простору ознак, по яким приймається рішення, та отримати аналітичний вираз.

Мета роботи – отримання виразу для розрахунку ймовірності правильного прийняття рішення при ідентифікації моделі руху об'єкта за результатами вимірювань.

Основний матеріал

1. Структура простору ознак. Синтез радіотехнічної слідкуючої системи на основі багатоальтернативної моделі руху об'єкта [3] та стандартної моделі спостережень призводить до алгоритму прийняття рішення за максимумом функції правдоподібності

$$\hat{\vec{x}}(nT) = \hat{\vec{x}}_m(nT),\quad \text{якщо } L\left[\vec{Z}(nT)/H_m\right] > L\left[\vec{Z}(nT)/H_i\right],\ \forall i \neq m, \tag{1}$$

де

$$\hat{\vec{x}}_i(nT) = \int\limits_{\Delta} \vec{x}(nT)\, p\left[\vec{x}(nT)/\vec{Z}(nT), H_i\right] d\vec{x} \ – \tag{2}$$

оптимальна умовна оцінка вектора стану об'єкта за результатам вимірювань за умови справедливості i-ї гіпотези про складові вектора прискорення об'єкта;

$L\left[\vec{Z}(nT)/H_i\right]$ – розподіляючі функції алгоритму оцінювання;

$$\vec{Z}(nT) = \left(\vec{z}(T)\quad \vec{z}(2T)\quad \dots\quad \vec{z}(nT)\right)^T \ – \tag{3}$$

сукупність результатів n вимірювань;

$\vec{z}(nT)$ – результати вимірювань у момент часу nT;

Як показано у [4], функції правдоподібності визначаються виразом

$$p\left[\vec{Z}(nT)/H_i\right] = (2\pi)^{-\frac{\lambda n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \left(\left|V_z(jT)\right|\right)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\vec{z}(jT) - \vec{m}_{z_i}(jT)\right]^T V_z^{-1}(jT)\left[\vec{z}(jT) - \vec{m}_{z_i}(jT)\right]\right\}, \tag{4}$$

отже є гаусовими з математичним сподіванням

$$\vec{M}_{z_i}(nT) = \begin{pmatrix} \vec{m}_{z_i}(T) \\ \vec{m}_{z_i}(2T) \\ \vdots \\ \vec{m}_{z_i}(nT) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

та коваріаційною матрицею, що задається у блочному вигляді:

$$V_Z(nT) = \begin{pmatrix} V_z(T) & O_\lambda & \cdots & O_\lambda \\ O_\lambda & V_z(2T) & \cdots & O_\lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O_\lambda & O_\lambda & \cdots & V_z(nT) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

де O_λ – нульова матриця розмірності $\lambda \times \lambda$; $\vec{m}_{z_i}(jT)$ – умовне апріорне математичне сподівання поточних спостережень (у момент часу jT); $V_z(nT)$ – умовна коваріаційна матриця поточних спостережень.

Відкинувши у виразі (4) неінформативні з точки зору прийняття рішення члени та співмножники, остаточно отримаємо такий вираз для розподіляючих функцій алгоритму оцінювання

$$L\left[\vec{Z}(nT)/H_i\right] = = \sum_{j=1}^{n} \vec{m}_{z_i}^{T}(jT) V_z^{-1}(jT)\left[\vec{z}(jT) - \vec{m}_{z_i}(jT)/2\right]. \qquad (7)$$

Рівняння поверхні, що розподіляє області прийняття i-ї та k-ї гіпотез, отримують з умови

$$L\left[\vec{Z}(nT)/H_i\right] = L\left[\vec{Z}(nT)/H_k\right]. \qquad (8)$$

Підставляючи (7) у (8), після перетворень отримаємо рівняння розподіляючої поверхні

$$\vec{\Omega}_{i,k}^{T}(nT)\left[\vec{Z}(nT) - \frac{\vec{M}_{z_i}(nT) + \vec{M}_{z_k}(nT)}{2}\right] = 0, \qquad (9)$$

де
$$\vec{\Omega}_{i,k}(nT) = \begin{pmatrix} V_z^{-1}(T)\Delta\vec{m}_{z_{i,k}}(T) \\ V_z^{-1}(2T)\Delta\vec{m}_{z_{i,k}}(2T) \\ \vdots \\ V_z^{-1}(nT)\Delta\vec{m}_{z_{i,k}}(nT) \end{pmatrix}; \qquad (10)$$

$$\Delta\vec{m}_{z_{i,k}}(jT) = \vec{m}_{z_i}(jT) - \vec{m}_{z_k}(jT) = = H\left[\vec{x}_{e_i}(jT) - \vec{x}_{e_k}(jT)\right], \quad ; \qquad (11)$$

H – матриця спостережень; $\vec{x}_{e_i}(nT)$ – екстрапольоване на момент nT значення вектора стану об'єкту, що формується за умови справедливості i-ї гіпотези про складові вектора прискорення об'єкта.

Рівняння (9) задає у λn-мірному просторі ознак гіперплощину, що проходить через точку, яка визначається кінцем вектору $\frac{\vec{M}_{z_i}(nT) + \vec{M}_{z_k}(nT)}{2}$, перпендикулярно нормалі $\vec{\Omega}_{i,k}(nT)$. Це є наслідком лінійності розподіляючих функцій (7) відносно результатів вимірювань. Отже, розподіляючі поверхні є гіперплощинами, що проходять через середини відрізків, які з'єднують центри областей прийняття гіпотез.

Структура простору ознак випливає з аналізу взаємного розташування центрів областей прийняття гіпотез та взаємної орієнтації розподіляючих площин. З виразу (9) випливає, що центри областей прийняття гіпотез, які відрізняються середніми значеннями однієї складової вектора прискорення, належать одній прямій. При цьому відстані між центрами областей прийняття сусідніх гіпотез однакові. Області прийняття гіпотез розділені паралельними гіперплощинами, які проходять через середини відрізків, що з'єднують центри областей сусідніх гіпотез, і орієнтовані під деяким кутом відносно прямої, якій належать центри областей прийняття гіпотез. Кожній складовій вектору прискорення відповідає група паралельних прямих, на яких розташовані центри областей прийняття гіпотез. Прямі, на яких розташовані центри областей прийняття гіпотез, що відрізняються середніми значеннями μ-ої складової вектора прискорення, будемо називати основними прямими μ-го напрямку. Отже вздовж кожної основної прямої є дві зовнішні області прийняття рішення, які обмежені гіперплощиною лише з одного боку, та $q_\mu - 2$ внутрішніх областей, що обмежені гіперплощинами з двох боків (де q_μ – кількість гіпотез про середнє значення μ-ї складової вектора прискорення). Виходячи з цього, області прийняття рішення можна поділити на чотири типи:

– внутрішні області, що обмежені гіперплощинами вздовж всіх основних прямих з усіх боків. Їх кількість $(q_\xi - 2)(q_\eta - 2)(q_\zeta - 2)$, де ξ, η, ζ – складові вектора прискорення об'єкта;

– зовнішні області першого типу, що вздовж двох основних прямих обмежені двома гіперплощинами, а вздовж іншої основної прямої обмежені лише однією гіперплощиною. Їх кількість $2(q_\mu - 2)(q_\nu - 2)$, де μ і ν – дві складові вектора прискорення об'єкта, причому $\mu \neq \nu$;

– зовнішні області другого типу, що вздовж однієї основної прямої обмежені двома гіперплощинами, а вздовж двох інших основних прямих обмежені лише однією гіперплощиною. Їх кількість $4(q_\mu - 2)$;

– зовнішні області третього типу, що вздовж всіх основних прямих обмежені лише однією гіперплощиною. Їх кількість 8.

2. Методика розрахунку ймовірності правильного прийняття рішення. У випадку декількох гіпотез ймовірність правильного прийняття рішення за n кроків визначається виразом [5]:

$$P_{пр}(n)=\sum_{i=1}^{q}P(H_i)P\left[\vec{Z}(nT)\in\Delta_i/H_i\right], \qquad (12)$$

де q – кількість гіпотез H_i про середні значення складових вектора прискорення об'єкта; $P(H_i)$ – апріорна ймовірність гіпотези; $P\left[\vec{Z}(nT)\in\Delta_i/H_i\right]$ – ймовірність влучення вектору результатів спостереження $\vec{Z}(nT)$ в область Δ_i прийняття і-ої гіпотези.

Розглянута структура простору ознак дозволяє розглядати ймовірність влучення вектору результатів спостереження $\vec{Z}(nT)$ в область Δ_i прийняття і-ої гіпотези як ймовірність одночасного виконання трьох подій, кожне з яких полягає у влучення вектору результатів спостереження $\vec{Z}(nT)$ в область Δ_i^{μ}, що обмежена гіперплощинами вздовж μ-ої основної прямої:

$$P\left\{\vec{Z}(nT)\in\Delta_i/H_i\right\}=\prod_{\mu=\xi,\eta,\zeta}P\left\{\vec{Z}(nT)\in\Delta_i^{\mu}/H_i\right\}. \qquad (13)$$

Внаслідок гаусовості функцій правдоподібності (4) ймовірність влучення вектору результатів спостереження $\vec{Z}(nT)$ в область Δ_i^{μ} визначається як

$$P\left\{\vec{Z}(nT)\in\Delta_i^{\mu}/H_i\right\}=\hat{\Phi}\left(y_{\mu_{1_i}}(nT)\right)-\hat{\Phi}\left(y_{\mu_{2_i}}(nT)\right), \qquad (14)$$

де $\hat{\Phi}(y)$ – функція Лапласа; $y_{\mu_{1_i}}(nT)$, $y_{\mu_{2_i}}(nT)$ – відстані від центру області прийняття і-ї гіпотези до розподіляючої гіперплощини, які нормовані до середньоквадратичного відхилення у напрямку нормалі до розподіляючих гіперплощин, причому $y_{\mu_{1_i}}(nT)>y_{\mu_{2_i}}(nT)$.

Можна показати, що внаслідок однаковості відстаней між центрами областей прийняття гіпотез, що належать основним прямим одного напрямку, для всіх сусідніх гіпотез і паралельності гіперплощин, що розподіляють області прийняття гіпотез вздовж цих основних прямих, нормовані відстані $y_{\mu_{1_i}}(nT)$ и $y_{\mu_{2_i}}(nT)$ дорівнюють одне одному (для внутрішніх гіпотез) і однакові для всіх гіпотез обраного основного напрямку. Тоді вираз (14) приводиться до вигляду

$$P\left\{\vec{Z}(nT)\in\Delta_i^{\mu}/H_i\right\}=$$
$$=\begin{cases}2\hat{\Phi}\left(y_{\mu}(nT)\right)-1, \text{ якщо } H_i \text{ – внутрішня гіпотеза;}\\ \hat{\Phi}\left(y_{\mu}(nT)\right), \text{ якщо } H_i \text{ – зовнішня гіпотеза,}\end{cases} \qquad (15)$$

де $y_{\mu}(nT)$ – відстань від центрів областей прийняття гіпотез, що належать основній прямій μ-го напрямку, до гіперплощин, що розподіляють області прийняття гіпотез вздовж цієї прямої, нормована до середньоквадратичного відхилення у напрямку нормалі до розподіляючих гіперплощин.

Можна показати, що відстань $y_{\mu}(nT)$ визначається виразом

$$y_{\mu}(nT)=\frac{\sum_{\rho,j}\vec{g}_1^{\mu T}A^T(jT-T)H^TV_z^{-1}(jT)\vec{b}_{\rho}\vec{b}_{\rho}^TH A(jT-T)\vec{g}_1^{\mu}}{2\sqrt{\sum_{\upsilon=1}^{\lambda n}\vec{b}_{\upsilon}^TU(nT)V_Z(nT)U^T(nT)\vec{b}_{\upsilon}\left[\vec{b}_{\upsilon}^TU(nT)\vec{\Omega}(nT)\right]^2}}, \qquad (16)$$

де $\vec{g}_1^{\mu}$ – 9-мірний вектор, що дорівнює добутку орт-вектора однієї зі складових вектора швидкості об'єкта (у залежності від μ) на приріст математичних сподівань між сусідніми гіпотезами багатоальтернативної моделі руху об'єкта;

$$A(nT)=\left[\sum_{m=1}^{n}\prod_{j=m}^{n}B(jT)+I\right] - \qquad (17)$$

матриця розмірності 9×9;

$$B(nT)=\Phi\left[\vec{x}(nT)\right]\left\{I-K(nT)H\right\}; \qquad (18)$$

$\Phi\left[\vec{x}(nT)\right]$ – перехідна матриця стану об'єкта; $K(nT)$ – матриця коефіцієнтів підсилення системи стеження; $V_z^{-1}(jT)$ – матриця, зворотна до коваріаційної матриці $V_z(jT)$, яка визначається виразом (6); $\vec{b}_{\rho}$ – λ-мірний орт-вектор, ρ-а координата якого дорівнює 1, а решта – 0; $\vec{b}_{\upsilon}$ – орт-вектор υ-ї осі основної системи координат; $U(nT)$ – фундаментальна матриця коваріаційної матриці $V_Z(jT)$ вектора $\vec{Z}(nT)$; $\vec{\Omega}(nT)$ – вектор нормалі до розподіляючих гіперплощин μ-го напрямку, що визначається виразом (10).

З виразів (13), (15) випливає, що ймовірності влучення вектору результатів спостережень у області прийняття гіпотез для внутрішньої та зовнішніх гіпотез першого, другого та третього типів визначаються виразами:

$$P_{внутр}=\left[2\hat{\Phi}\left(y_{\xi}(nT)\right)-1\right]\times$$
$$\times\left[2\hat{\Phi}\left(y_{\eta}(nT)\right)-1\right]\left[2\hat{\Phi}\left(y_{\zeta}(nT)\right)-1\right]; \qquad (18)$$

$$P_{зов_{1_\mu}}=\hat{\Phi}\left(y_{\mu}(nT)\right)\times$$
$$\times\left[2\hat{\Phi}\left(y_{\upsilon}(nT)\right)-1\right]\left[2\hat{\Phi}\left(y_{\vartheta}(nT)\right)-1\right]; \qquad (19)$$

$$P_{зов_{2_\mu}}=\left[2\hat{\Phi}\left(y_{\mu}(nT)\right)-1\right]\hat{\Phi}\left(y_{\upsilon}(nT)\right)\hat{\Phi}\left(y_{\vartheta}(nT)\right), \qquad (20)$$

$$P_{зов_3}=\hat{\Phi}\left(y_{\xi}(nT)\right)\hat{\Phi}\left(y_{\eta}(nT)\right)\hat{\Phi}\left(y_{\zeta}(nT)\right). \qquad (21)$$

Підставляючи (18) – (21) у (12) за умови апріорної рівноймовірності гіпотез, отримаємо

$$
\begin{aligned}
P_{\bullet p}(n) = \frac{1}{q}\{ &\prod_{\mu=\xi,\eta,\zeta}(q_\mu - 2)\left[2\hat{\Phi}(y_\mu(nT)) - 1\right] + 8\prod_{\mu=\xi,\eta,\zeta}\hat{\Phi}(y_\mu(nT)) + \\
&+2\sum_{\mu=\xi,\eta,\zeta}\hat{\Phi}(y_\mu(nT))\prod_{k=\xi,\eta,\zeta k\neq\mu}(q_k - 2)\left[2\hat{\Phi}(y_k(nT)) - 1\right] + \\
&+4\sum_{\mu=\xi,\eta,\zeta}(q_\mu - 2)\left[2\hat{\Phi}(y_\mu(nT)) - 1\right]\prod_{k=\xi,\eta,\zeta,k\neq\mu}\hat{\Phi}(y_k(nT))\}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

У випадку представлення прискорення складовими по осям вимірювальної системи координат кількості гіпотез про середні значення всіх складових вектора прискорення однакові, і вираз (22) приводиться до вигляду:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{пр}}(n) = \frac{1}{q}\{&8\left(\tilde{q}^3 + 3\tilde{q}^2 + 3\tilde{q} + 1\right)\prod_{\mu=\xi,\eta,\zeta}\hat{\Phi}(y_\mu(nT)) - 4\tilde{q}\left(\tilde{q}^2 + 2\tilde{q} + 1\right)\times\left[\hat{\Phi}(y_\xi(nT))\hat{\Phi}(y_\eta(nT)) + \right. \\
&\left. + \hat{\Phi}(y_\xi(nT))\hat{\Phi}(y_\zeta(nT)) + \hat{\Phi}(y_\eta(nT))\hat{\Phi}(y_\zeta(nT))\right] + 2\tilde{q}^2(\tilde{q}+1)\sum_{\mu=\xi,\eta,\zeta}\hat{\Phi}(y_\mu(nT)) - \tilde{q}^3\},
\end{aligned} \tag{23}
$$

де
$$\tilde{q} = q_\mu - 2. \tag{24}$$

Таким чином, методика розрахунку ймовірності правильного прийняття рішення про середні значення складових вектора прискорення зводиться до знаходження відстані від центрів областей прийняття гіпотез, що належать основній прямій μ-го напрямку, до гіперплощин, що розподіляють області прийняття гіпотез вздовж цієї прямої, нормованої до середньоквадратичного відхилення у напрямку нормалі до розподіляючих гіперплощин згідно з виразом (16), та розрахунку ймовірності правильного прийняття рішення згідно з виразом (22) або за умови апріорної рівноймовірності гіпотез згідно з виразом (23).

Висновки

У результаті аналізу розподіляючих функцій алгоритму прийняття рішення за максимумом функції правдоподібності встановлено, що у просторі ознак є внутрішні області, які обмежені розподіляючими площинами з обох боків вздовж кожної основної прямої, та три типи зовнішніх областей, які вздовж однієї (двох або трьох) основних прямих обмежені лише однією розподіляючою площиною. Отримано вирази для розрахунку ймовірності правильного прийняття рішення про середні значення складових вектора прискорення. Встановлено, що її значення визначається кількістю гіпотез про середні значення складових вектора прискорення об'єкта, кількістю накопичених результатів вимірювань, відношенням сигнал/шум, параметрами багатоальтернативного закону розподілу і дійсним рухом об'єкта.

Список літератури

1. *Сейдж Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении: Пер. с англ./ Э. Сейдж, Дж. Мелс. – М.: Связь, 1976. – 496 с.*
2. *Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник / Я.Д. Ширман, С.Т.Багдасарян, А.С. Маляренко и др.; под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: Радиотехника, 2007. – 512 с.*
3. *Хисматулин В.Ш. Многоальтернативная модель движения маневрирующей цели / В.Ш. Хисматулин, И.И. Сачук // Збірник наукових праць. – Х.: ХВУ, 1998. – Вип. 21. – С. 71-75.*
4. *Васильєв В.А. Розподіляючі функції алгоритму прийняття рішення при ідентифікації моделі руху об'єкта за результатами вимірювань / В.А. Васильєв, І.І. Сачук, С.В. Селезньов, А.С. Чопенко // Наука і техніка ПС ЗС України. – Х.: ХУПС, 2011. – № 1(5). – С. 88-91.*
5. *Справочник по вероятностным расчетам / Г.Г. Абезгауз, Ю.Н. Тронь, Ю.Н. Копейкин, И.А. Коровина. – М.: Воениздат, 1970. – 536 с.*

Надійшла до редколегії 2.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.В. Худов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ ПРАВИЛЬНОГО ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

В.А. Васильев, И.И. Сачук, С.В. Селезнев, А.С. Чопенко

Проанализирована структура пространства признаков и получены выражения для расчета вероятности правильного принятия решения про средние значения составляющих вектора ускорения объекта.

***Ключевые слова**: многоальтернативный подход, идентификация, структура пространства признаков, вероятность правильного принятия решения.*

THE STRUCTURE OF SIGNATURE SPACE AND METHOD FOR CALCULATING THE CORRECT DECISION PROBABILITY OF THE OBJECT'S MOVEMENT MODEL IDENTIFICATION BY MEASUREMENT RESULTS

V.A. Vasilyev, I.I. Sachuk , S.V. Seleznev , A.S. Chopenko

The structure of signature space is analyzed. Expressions are received for probability of correct decision about the mean values of acceleration vector components of the object.

***Keywords:** multi-alternative approach, identification, separation function, the structure of signature space, probability of correct decision.*