УДК519.21:519.23

В.Ю. Дубницкий, Л.Д. Филатова

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСЕЧЁННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЭЛЕЯ И МАКСВЕЛЛА

Для односторонне и двусторонне усечённых распределения Рэлея и Максвелла получены выражения для первых двух начальных моментов.

Ключевые слова: *усечённые распределения, распределение Рэлея, усечённое распределение Рэлея, усечённое распределение Максвелла, распределение Максвелла, моменты усечённых распределений.*

Введение

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, для которой известны функция и плотность распределения. Примем, что возможные значения этой случайной величины расположены на положительной полуоси, то есть $0 \le X < \infty$. Предположим, что для данной случайной величины плотность распределения такова, что её первый начальный и второй центральный моменты конечны. Пусть исходя из физического смысла задачи интерес представляют значения математического ожидания и дисперсии (среднеквадратического отклонения) случайной величины X не на всей области её определения, а в некоторых подобластях:

$$0 \le X \le u < \infty, \qquad (1)$$

$$u \le X < \infty, \qquad (2)$$

$$u \le X \le w < \infty. \qquad (3)$$

В случае справедливости условия (1) будем говорить об усечённом справа распределении, в случае (2) будем говорить об усечённом слева распределении и в случае (3) – общем случае, будем говорить о двустороннем усечённом распределении случайной величины X.

Анализ литературы. Пусть на интервале (A, B), возможно бесконечном, задана функция распределения F(x) и плотность распределения f(x) случайной величины X. Примем, что двусторонне усечённая функция распределения задана условием:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin (u, w); \\ CF(x), & \text{если} \quad x \in (u, w). \end{cases} \qquad (4)$$

Плотность распределения в этом случае имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin (u, w); \\ cf(x), & \text{если} \quad x \in (u, w). \end{cases} \qquad (5)$$

При этом $A \le u \le x \le w \le B$. (6)

В работе [1], которая вышла в свет на языке оригинала в 1952 г., была поставлена и решена задача определения функций распределения и плотности случайной величины (ВВ) X при условии нормальности исходного распределения и интервала усечения. В работе [2], опубликованной в 1962 г., но выполненной приблизительно в одно время с работой [1], приведена общая теория решения поставленной задачи. В работе [3] приведено подробное решение задачи определения числовых характеристик усечённого нормального распределения при условии, что интервал усечения имеет вид $-\infty \le X < \infty$. В справочнике [4] приведен результат решения поставленной задачи для интервала усечения вида $-\infty < u \le x \le w < \infty$.

Следуя работе [2], приведем основные этапы решения поставленной задачи.

Нормирующий множитель, присутствующий в уравнениях (4) и (5), определим из условия:

$$C\int_u^w f(x)dx = 1 \qquad (7)$$

или $$C = [F(w) - F(u)]^{-1}. \qquad (8)$$

Функция распределения вероятности усечённого распределения:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [u, w]; \\ C\int_u^x f(x)dx = C[F(x) - F(u)], & \text{если } x \in [u, w]. \end{cases} \qquad (9)$$

Математическое ожидание усечённого распределения определяют по формуле:

$$M[X_{u,w}] = C\int_u^w xf(x)dx, \qquad (10)$$

второй начальный момент определяют по формуле

$$\alpha_{u,w}^2 = C\int_u^w x^2 f(x)dx. \qquad (11)$$

В этом случае дисперсия составит:

$$D[X_{u,w}] = \alpha_{(u,w)}^2 - \left(M[X_{u,w}]\right)^2. \qquad (12)$$

В работе [5] получены выражения для определения математического ожидания и дисперсии для двусторонне усечённого экспоненциального распределения, гамма- распределений и распределения Вейбулла. Применение числовых характеристик усечённых распределений при решении экономических задач подробно рассмотрено в работах [6 – 8].

Цель работы. Для усечённых слева, усечённых справа и двусторонне усечённых распределений Рэлея и Максвелла определить математическое ожидание и второй начальный момент.

Полученные результаты

1. Определение числовых характеристик усечённых распределений Рэлея.

Плотность этого распределения приведена в работе [9]:

$$f_1(x) = \frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \tag{13}$$

его функция распределения имеет вид:

$$F_1(x) = 1-\exp\left(-x^2/(2a^2)\right),\ x>0, a>0. \tag{14}$$

1.1. Рассмотрим правосторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (1).

В соответствии с [5] нормирующий множитель $C_{1пр}$ определим из условия:

$$C_{1п} = \left[F_1(u)-F_1(0)\right]^{-1} = \left[F_1(u)\right]^{-1} = \\ = \left[1-\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)\right]^{-1}. \tag{15}$$

Определим математическое ожидание для усечённого справа распределения Рэлея. Для этого, воспользовавшись условием (10) ,вычислим интеграл I_1:

$$I_1 = \int_0^u x\frac{x}{a^2}\exp\left(-x^2/(2a^2)\right)dx =$$

$$a\sqrt{\pi/2}\operatorname{erf}\left(u\sqrt{2}/(2a)\right) - u\exp\left(-u^2/(2a^2)\right), \tag{16}$$

после чего получим искомый результат:

$$M_1[X_{\infty,u}] = \left[F_1(u)\right]^{-1} I_1 = a\left[1-\exp(-u^2/(2a^2)\right]^{-1} \times \\ \times\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right) - u\exp\left(-u^2/(2a^2)\right). \tag{17}$$

В условии (17) и далее функция erf(t) – это интеграл ошибок или функция Крампа:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Эта функция связана с функцией нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$$

условием

$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(\sqrt{2x}-1.$$

Упростив выражение (14), получим, что

$$M_1[X_{\infty,u}] = \\ = \frac{\sqrt{2}\cdot\left[\sqrt{\pi}a\exp\left(u^2/(2a^2)\right)\operatorname{erf}\left(u^2/(2a^2)\right) - u\sqrt{2}\right]}{2\cdot\left[\exp\left(u^2/(2a^2)\right)-1\right]}. \tag{18}$$

Для определения дисперсии усечённого на интервале (1) распределении Рэлея вначале вычислим интеграл

$$I_2 = \int_0^u x^2\frac{x}{a^2}\exp\left(-x^2/(2a^2)\right)dx = \\ = 2a^2 - e^{-u^2/2a^2}\left(2a^2+u^2\right). \tag{19}$$

Второй начальный момент для распределения Рэлея с усечением вида (1) получим из условия:

$$M_2[X_{0,u}] = \left[1-\exp(-u^2/(2a^2)\right]^{-1}.I_2 = \\ = \frac{2a^2\exp\left(u^{2/(2a^2)}\right) - 2a^2 - u^2}{\exp\left(a^2/\left(2a^2\right)\right)-1}. \tag{20}$$

Дисперсию усечённого распределения Рэлея на участке, заданном условием (1), найдём из условия:

$$D_1[X_{0,u}] = M_2[X_{0,u}] - (M_1[X_{-0,u}])^2. \tag{21}$$

Из-за громоздкости получаемых выражений опустим их аналитический вид, так как условие (18) позволяет вычислить дисперсию без особых осложнений.

1.2. Рассмотрим усеченное слева распределение, то есть распределение, определенное условием (1).

В соответствии с [5], нормирующий множитель $C_{1л}$ определим из условия:

$$C_{1л} = \left[F_1(\infty)-F_1(u)\right]^{-1} = \\ \left[1-(1-\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)\right]^{-1} = \left(\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)\right)^{-1}. \tag{22}$$

Определим математическое ожидание для усечённого справа распределения Рэлея. Для этого, воспользовавшись условием (10), вычислим интеграл I_2:

$$I_2 = \int_u^\infty x\frac{x}{a^2}\exp\left(-x^2/(2a^2)\right)dx =$$

$$= 2\left(a\sqrt{\pi} + u\cdot\exp\left(-u^2/(4a^2)\right) - a\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(u/(2a)\right)\right), \tag{23}$$

умножив условие (22) на выражение (23), получим, что:

$$M_1[X_{и,\infty}] = 2\left[a\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{u^2}{4a^2}\right)\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{u}{2a}\right)\right)+u\right]. \tag{24}$$

Для определения второго начального момента для распределения Рэлея с усечением вида (2) вычислим интеграл вида:

$$I_3 = \int_u^\infty x^2\frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = 2\exp\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right)\cdot\left(4a^2+u^2\right). \tag{25}$$

Второй начальный момент определим по условию:

$$M_2[X_{u,\infty}] = C_{1л}I_3 = \left(e\,xp\left(-u^2/(2a^2)\right)\right)^{-1} \times \\ \times 2\exp\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right)\cdot\left(4a^2+u^2\right). \tag{26}$$

Дисперсию распределения данного вида определим, используя условие (21).

1.3. Рассмотрим двусторонне усеченное распределение, то есть распределение, определенное условием (3).

Нормирующий множитель

$$C_{1дв}=\left(F_1(w)-F_1(u)\right)^{-1}=$$

$$\left[\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)-\exp\left(-w^2/(2a^2)\right)\right]^{-1}. \quad (27)$$

Для определения математического ожидания Мдв[Xu,w] рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I_4=\int_u^w x\frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = ue^{-u^2/\left(2a^2\right)}-we^{-w^2/\left(2a^2\right)}-$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a\left[\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2a}\right)\right]. \quad (28)$$

Следовательно,

$$Мдв[Xu,w] = Сдв{\cdot}I_4= A_3\,; \quad (29)$$

где

$$A_3=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(D_1D_2+w\sqrt{2}\ \right)-u\sqrt{2}\cdot\exp\left(w^2/\left(2a^2\right)\right)}{\exp\left(u^2/\left(2a^2\right)\right)-\exp\left(w^2/\left(2a^2\right)\right)}\,; \quad (30)$$

$$D_1=\exp\left(u^2/(2a^2)\right)a\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{w^2}{2a^2}\right); \quad (31)$$

$$D_2=\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2a}\right). \quad (31)$$

Для определения второго начального момента распределения Рэлея с усечением вида (3) вычислим вспомогательный интеграл:

$$I_5=\int_u^w x^2\frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx=$$

$$e^{-u^2/2a^2}\left(2a^2+u^2\right)-e^{-w^2/2a^2}\left(2a^2+w^2\right). \quad (32)$$

Второй начальный момент и дисперсию определим, используя равенства:

$$M_2[Xu,w]= C_{дв}I_4,$$

$$D\,[Xu,w]= M_2[Xu,w] - (Мдв[Xu,w])^2. \quad (33)$$

2. Определение числовых характеристик усечённых распределений Максвелла.

Последовательность действий при решении поставленной в п.2 задачи аналогична решению задачи, сформулированной в п.1. Поэтому в данном разделе будут приведены только основные результаты.

Пусть плотность распределения Максвелла имеет вид, указанный в работе [9]:

$$f_м(x)=\frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/(2a^2)}, \quad x>0,\ a>0. \quad (34)$$

Функцию распределения вероятности для плотности вида (34) определим так:

$$F_м(x)=\int_0^x\frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/(2a^2)}dx=$$

$$=\operatorname{erf}\left(x\sqrt{2}/(2f)\right)-x\sqrt{2}\cdot\exp\left(-x^2/(2a^2)\right)\Big/\left(a\sqrt{\pi}\right). \quad (35)$$

Нормирующие множители для соответствующих видов усечения примут вид.

Для правосторонне усечённого распределения, соответствующего условию (1):

$$C_{2п}=(F_м(u)-F(0))^{-1}=$$

$$=\left(\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2f}\right)-\frac{u\sqrt{2}\cdot\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)}{a\sqrt{\pi}}\right)^{-1}. \quad (36)$$

Для двусторонне усечённого распределения, соответствующего условию (3):

$$C_{2дв}=\left(F(w)-F(u)\right)^{-1}=$$

$$=\left(\left(\operatorname{erf}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2f}\right)-\frac{w\sqrt{2}\cdot\exp\left(-w^2/(2a^2)\right)}{a\sqrt{\pi}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2f}\right)-\frac{u\sqrt{2}\cdot\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)}{a\sqrt{\pi}}\right)\right)^{-1}. \quad (37)$$

Для левосторонне усечённого распределения, соответствующего условию (2):

$$C_{2л}=(1-F(u))^{-1}=$$

$$=\left(1-\left(\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2f}\right)-\frac{u\sqrt{2}\cdot\exp\left(-u^2/(2a^2)\right)}{a\sqrt{\pi}}\right)\right)^{-1}. \quad (38)$$

2.1. Рассмотрим правосторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (1).

Математическое ожидание на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_1[X_{0,u}]= C_{2п}\int_0^u x\,\frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/(2a^2)}dx=$$

$$=C_{2п}\,\sqrt{2/\pi}\left(2a-\exp(-u^2/2a^2)\cdot(2a^2+u^2)/a\right). \quad (39)$$

Второй начальный момент на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_2[X_{0,u}]= C_{2п}\int_0^u x^2\,\frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/(2a^2)}dx=C_{2п}\times$$

$$\times\left(3a^2\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right)-u\sqrt{2}\exp\left(-\frac{u^2}{2a^2}\right)\left(3a^2+u^2\right)\right). \quad (40)$$

2.2. Рассмотрим двусторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (3).

Математическое ожидание на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_1[X_{u,w}] = C_{2дв} \times$$

$$\times \int_u^w x \frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = C_{2дв} \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(A_4 - A_5), \quad (41)$$

где $$A_4 = \exp(-u^2/(2a^2)) \cdot \left(2a^2 + u^2\right), \quad (42)$$

$$A_5 = \exp(-w^2/(2a^2)) \cdot \left(2a^2 + w^2\right). \quad (43)$$

Второй начальный момент на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_2[X_{u,w}] = C_{2п} \times$$

$$\times \int_u^w x^2 \frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = C_{2п} \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[A_6 - A_7\right], \quad (44)$$

при условии, что:

$$A_6 = \left[u \exp(-u^2/2a^2)(3a^2 + u^2)\right], \quad (45)$$

$$A_7 = \left[\omega \exp(-\omega^2/2a^2)(3a + \omega^2)\right]. \quad (46)$$

2.3. Рассмотрим левосторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (2). Математическое ожидание на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_1[X_{u,\infty}] = C_{3л} \int_u^w x \frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-u^2/2a^2)(2a^2 + u^2). \quad (47)$$

Второй начальный момент на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_2[X_{u,\infty}] = C_{3л} \int_u^\infty x^2 \frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = A_8 - A_9, \quad (48)$$

где $$A_8 = 3a^2 - 3\alpha^2 \operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right);$$

$$A_9 = \frac{\sqrt{2}u \exp\left(-u^2/2a^2\right)\left(3a^2 + u^2\right)}{\alpha\sqrt{\pi}}. \quad (49)$$

Знание первого и второго начального моментов позволяет, используя условие (21), вычислить математические ожидания для всех указанных в данной работе типов распределений.

Выводы

1. Определены значения первого и второго начальных моментов левосторонне усечённых, правосторонне и двусторонне усечённых распределений Рэлея и Максвелла.

2. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач теории надёжности и оценивании риска финансовых операций.

Список литературы

1. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями / А. Хальд. – М.: Иностранная литература, 1956. – 595 с.

2. Шор Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности / Я.Б. Шор. – М.: Сов. радио, 1962. – 527 с.

3. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1. Теорія ймовірностей / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

4. Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев, Г.П. Филей. – К.: Наук. думка, 1992. – 252 с.

5. Дубницкий В.Ю. Определение числовых характеристик двусторонне усечённого экспоненциального и гамма-распределения / В.Ю. Дубницкий, С.В. Гадецкая // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2008. – Вип. 2(69). – С. 2-5.

6. Верченко П.І. Багатокритеріальність і динаміка економічного ризику (моделі та методи): Монографія / П.І. Верченко. – К.: КНЕУ, 2006. – 272 с.

7. Бублик Н.Д. Управление финансовыми и банковскими рисками: Учебное пособие / Н.Д. Бублик, С.В. Почепцов, А.Б. Секерин. – Уфа: альтернатива РИЦ, 1998. – 254 с.

8. Секерин А.Б. Анализ и оценка риска: Курс лекций / А.Б. Секерин, Т.М. Мамошина. – М.: ИИЦ МГУ ДТ, 2003. – 160 с.

9. Справочник по вероятностным расчётам / [Абезгауз А.А., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А.]. – М.: Воениздат, 1966. – 407 с.

10. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

Поступила в редколлегию 6.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Гороховатский, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗРІЗАНИХ РОЗПОДІЛІВ РЕЛЕЯ І МАКСВЕЛЛА

В.Ю. Дубницький, Л.Д. Філатова

Для однобічно і двобічно зрізаних розподілв Релея і Максвелла отримані вирази для перших двох початкових моментів.

Ключові слова: *зрізані розподіли, розподіл Релея, розподіл Максвелла, зрізаний розподіл Релея, зрізаний розподіл Максвелла, моменти зрізаних розподілів.*

NUMERICAL CHARACTERISTIC OF THE TRUNCATED DISTRIBUTION OF RAYLEIGH AND MAXWELL

V.Iu. Dubnitskyi, L.D. Filatova

For one-sided and bilaterally truncated distributions of Reyleigh and Maxwell are got expressions for the first of two initial moments.

Keywords: *truncated distributions, distribution of Reyleigh, truncated distribution of Reyleigh, truncated distribution of Maxwell, distribution of Maxwell, moments of the truncated distributions.*