

## СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ БАГАТОФАКТОРНОГО ОЦІНЮВАННЯ

*Розглядається застосування підходу компараторної ідентифікації для вирішення завдання синтезу моделей багатофакторного оцінювання і вибору рішень. Запропонований метод рішення задачі структурно-параметричної ідентифікації для адитивних, мультиплікативних і комбінованих моделей, який дозволяє звести її до однотипних завдань лінійного або нелінійного математичного програмування.*

*компараторна ідентифікація, багатофакторне оцінювання, структурно-параметрична ідентифікація*

### Вступ

**Постановка проблеми.** Завдання багатофакторного оцінювання виникають при прийнятті рішень на всіх етапах процесів проектування, модернізації і експлуатації антропогенних систем. У основі моделей прийняття рішень лежить парадигма максимізації корисності [1, 2]. Вважається, що особа, яка приймає рішення (ОПР), при виборі варіантів із множини допустимих  $x \in X$  приписує їм деяку корисність  $P(x)$ , значення якої і визначають його вибір:

$$\forall x, y \in X: x \approx y \leftrightarrow P(x) = P(y);$$

$$x \succ y \leftrightarrow P(x) > P(y); x \geq y \leftrightarrow P(x) \geq P(y).$$

Розрізняють підходи на основі ординальної (порядкової) і кардинальної (кількісної) теорії корисності. При створенні комп'ютеризованих систем підтримки прийняття рішень потрібна кількісна оцінка переваг альтернатив  $P(x)$ ,  $x \in X$ . З цією метою на основі функцій корисності часткових критеріїв (ФПЧК)  $\xi_i(k_i(x))$ ,  $i = \overline{1, m}$  (де  $m$  – кількість часткових критеріїв) формується узагальнена оцінка корисності  $P(x)$  для кожного з допустимих рішень  $x \in X$  [2].

Визначення метрики для ранжирування альтернатив у вигляді функції загальної корисності (ФЗК)  $P(x)$  представляє, по суті, рішення задачі ідентифікації. У загальному випадку в процесі ідентифікації потрібне рішення питань, пов'язаних з вибором критеріїв подібності, вхідних сигналів, структури і параметрів моделі, оцінки її точності і адекватності [3]. Найбільший інтерес, як в теоретичному, так і в практичному плані представляють питання вибору структури і параметрів (коефіцієнтів функцій корисності часткових критеріїв і адаптаційних коефіцієнтів) моделей оцінювання  $P(x)$ .

**Аналіз сучасних досліджень і публікацій.** Особливістю процесів ідентифікації моделей багатофакторного оцінювання і вибору рішень є те, що

як вихідні сигнали в таких завданнях виступають оцінки і рішення людини, що носять наближений або якісний характер [2]. Як критерії ідентифікації залежно від умов завдання використовуються: мінімум сумарної (середньої, максимальної, сумарної квадратичної) абсолютної, відносної погрішності оцінки загальної корисності  $P(x)$ , максимум сили переваг, середньої точки, максимізації функції правильності вибору або погрішності відновлення порядку альтернатив [4, 5].

Моделі багатокритеріального оцінювання і вибору будуються на основі адитивних, мультиплікативних або змішаних ФЗК. На практиці найчастіше використовуються адитивні ФЗК, які представляються у вигляді

$$P_A(x, q_M) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i(x), \quad (1)$$

де  $P(x)$  – корисність альтернативи  $x$ ;  $m$  – кількість часткових критеріїв;  $\lambda_i$  – коефіцієнт важливості критерію  $k_i$ , вибраний з урахуванням умов  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ;  $i = \overline{1, m}$ ,  $\xi_i(x) = \xi_i(k_i(x))$  – ФПЧК критерію  $k_i$ .

Недоліком моделей вигляду (1) вважається те, що вони не відображають об'єктивно роль часткових критеріїв і допускають практично необмежену компенсацію одних критеріїв іншими [2, 6].

Мультиплікативні моделі представляються у вигляді [5, 6]:

$$P_M(x, q_M) = \prod_{i=1}^m [\xi_i(x)]^{\lambda_i} \quad (2)$$

і в практиці прийняття рішень використовуються набагато рідше, ніж адитивні. Перевагою мультиплікативних моделей  $P(x)$  вигляду (2) вважається те, що вони не вимагають нормування часткових критеріїв, недоліком – те, що вони компенсують недо-

статню величину одного критерію надмірною величиною іншого [6].

Як розвиток моделей (1) і (2) запропоновані комбіновані ФЗК, які об'єднують адитивні і мультиплікативні члени [7, 8]:

$$P_{S_1}(x, q_M) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{k}_i(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \cdot \bar{k}_i(x) \cdot \bar{k}_j(x) + \dots, \quad (3)$$

де  $\lambda_{ij}$  – вагові коефіцієнти добутку нормованих критеріїв  $\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ ;

$$P_{S_2}(x) = \left[ \beta \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{k}_i(x) \right] + \left\{ (1-\beta) \cdot \prod_{i=1}^m [\bar{k}_i(x)]^{\lambda_i} \right\}, \quad (4)$$

де  $\beta$  – адаптаційний коефіцієнт, що визначає вид схеми,  $0 \leq \beta \leq 1$ . При  $\beta = 1$  (4) реалізує адитивну схему (1), при  $\beta = 0$  – мультиплікативну схему (2).

Недоліком ФЗК вигляду (3) є її складність, а (4) – трудність визначення значення адаптаційного коефіцієнта  $\beta$ .

Якщо визначені вигляд моделі  $P_{\delta}(x, q_M)$ ,  $\delta \in \Delta$  ( $\Delta = \{A, M, S_1, S_2\}$ ) і вектор її параметрів  $q_M \in Q_M$  ( $Q_M$  – множина допустимих значень параметрів), то задача вибору для моделей вигляду (1) – (4) може бути зведена до задачі оптимізації вигляду  $x^0 = \arg \max_{x \in X} P_{\delta}(x, q_M)$ . На практиці і вид моделі

$P_{\delta}(x, q_M)$ ,  $\delta \in \Delta$ , і вектор її параметрів  $q_M \in Q_M$  вимагають свого визначення. Вектор параметрів  $q_M$ , в загальному випадку, складається з трьох векторів  $q_M = [q_{\Xi}, q_{\Lambda}, q_{\Psi}]$ , де  $q_{\Xi}$  – вектор параметрів ФПЧК;  $q_{\Lambda} = [\lambda_i]_{i=1}^m$  – вектор вагових коефіцієнтів часткових критеріїв;  $q_{\Psi}$  – вектор адаптаційних параметрів ФЗК. Традиційно визначення компонент вектора параметрів  $q_M \in Q_M$  здійснюється експертним шляхом методами ранжирування, приписування балів, послідовних переваг, парних порівнянь [2, 6]. Недоліками перелічених методів вважаються суб'єктивізм, складність і відносно невисока точність оцінок.

Як альтернатива експертному оцінюванню в даний час все частіше використовується технологія компараторної ідентифікації [2, 4]. В рамках цього підходу розроблені математичні моделі і методи ідентифікації вагових коефіцієнтів окремо для адитивних моделей вигляду (1) [5], мультиплікативних моделей вигляду (2) [4], для адитивно-мультиплікативних моделей на основі полінома Колмогорова-Габор [7].

Огляд літератури з проблеми синтезу моделей багатофакторного оцінювання показав, що в роботах розглядаються завдання параметричної або структурно-параметричної ідентифікації в одному з класів адитивних, мультиплікативних або змішаних ФЗК. Разом з тим, для підвищення точності моделей бага-

тофакторного оцінювання доцільним є її вибір на всій множині перелічених класів.

**Метою статті** є розробка методу структурно-параметричної компараторної ідентифікації моделей багатофакторного оцінювання і вибору рішень в класах адитивних, мультиплікативних або змішаних ФЗК (1) – (4).

Суть загальної задачі ідентифікації моделі багатофакторного оцінювання полягає в наступному. ОПР на основі оцінок за множиною часткових критеріїв  $\{k_i(x)\}_{i=1}^m$  встановлює якісну корисність на множині альтернатив  $x \in X$ . Вона може бути виражена множиною бінарних відносин еквівалентності  $R_E(X) = \{(x, y) : x, y \in X, x \sim y\}$ , нестрокої переваги  $R_{NS}(X) = \{(x, y) : x, y \in X, x \geq y\}$ , строгої переваги  $R_S(X) = \{(x, y) : x, y \in X, x \succ y\}$  і представлена порядком одного з видів:

$$R^0(X) = x^0 \succ x_1 \succ x_j \succ \dots \succ x_n; \quad (5)$$

$$R^0(X) = x^0 \succ x_1 \approx x_j \succ \dots \succ x_n; \quad (6)$$

$$R^0(X) = x^0 \geq x_1 \geq x_j \geq \dots \geq x_n. \quad (7)$$

Потрібно для встановленого ОПР порядку  $R^0(X)$  (5), (6) або (7) вибрати вид моделі багатофакторного оцінювання  $P_{\delta}(x, q_M)$  з множини допустимих  $\delta \in \Delta$  і підібрати якнайкращі значення її параметрів  $q_M \in Q_M$  за показниками адекватності (точності відновлення порядку), економічності і максимуму сили переваги.

### Математична модель і метод рішення задачі

Складність завдання ідентифікації моделей багатофакторного оцінювання  $P_{\delta}(x, q_M)$  традиційно вимагала її декомпозиції на комплекс завдань: структурної ідентифікації ФЗК (вибір вигляду моделі  $\delta \in \Delta$ ), параметричної ідентифікації ФПЧК [9] (визначення

$$q_M = q_{\Xi} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$$

$$\text{або } q_M = q_{\Xi} = [q_{\xi 1}, q_{\xi 2}, \dots, q_{\xi m}],$$

параметричної ідентифікації ФЗК (визначення  $q_M = q_{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$  або  $q_M = q_{\Psi} = [\beta_i]_{i=1}^n$ ).

Вибір вигляду моделі  $\delta^0 \in \Delta$  і найкращих значень параметрів  $q_M^0 = [\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0] \in Q_{\Lambda}$ , відповідно до мети рішення задачі, може бути проведений за критерієм мінімуму погрішності відновлення переваг ОПР:

$$S = \sum_{j=1}^n \left| g^0(x_j) - g(x_j, q_M) \right| \rightarrow \min_{q_M \in Q_M}, \quad (8)$$

де  $n = \text{Card } X$  – потужність множини альтернатив;  $g^0(x_j)$ ,  $g(x_j, q_M)$  – порядкові номери альтернативи  $x_j$  в перевазі ОПР  $R^0(X)$  і одержаному на підставі значень ФЗК з вектором параметрів  $q_M \in Q_M$ .

Проте в такій постановці сформульована задача є некоректною по Адамару [2]. У загальному випадку вона може не мати жодного рішення  $q_M \in Q_M$  (якщо ОПР помилково задала переваги  $R^0(X)$ ) або мати неєдине рішення, а цілу область рішень. Для визначення єдиного рішення  $q_M^0 \in Q_M$  потрібна регуляризація початкової задачі, тобто введення додаткового критерію. З причини відсутності кількісних значень корисності  $P^0(x)$  для переваг ОПР  $R^0(X)$  критерії чебишевської точки і максимізації сили переваг ОПР не застосовні [5].

Для переваг ОПР у вигляді (5) на основі відношення  $R_S(X)$  в якості критеріїв пропонується використовувати максимум мінімальної різниці ФЗК суміжних альтернатив  $x_j, x_{j+1} \in R^0(X)$

$$S = \min_{1 \leq j \leq n-1} \{P_\delta(x_j, q_M) - P_\delta(x_{j+1}, q_M)\} \rightarrow \max_{q_M \in Q_M}, \quad (9)$$

або максимум суми різниць ФЗК суміжних альтернатив

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} |P_\delta(x_j, q_M) - P_\delta(x_{j+1}, q_M)| \rightarrow \max_{q_M \in Q_M}, \quad (10)$$

де  $P_\delta(x_j, q_M)$  – значення ФЗК вигляду  $\delta$  із значеннями параметрів  $q_M$  для альтернативи  $x_j$ .

Для переваг ОПР, які можуть бути виражені у вигляді відношення еквівалентності  $R_E(X)$ , в якості критерію пропонується використовувати мінімум суми модулів різниці значень ФЗК

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} |P_\delta(x_j, q_M) - P_\delta(x_{j+1}, q_M)| \rightarrow \min_{q_M \in Q_M}. \quad (11)$$

На перевазі ОПР вигляду (6) необхідно заздалегідь виділити бінарні відносини строгої переваги  $R_S(X)$  і еквівалентності  $R_E(X)$ . Тоді в якості критерію ідентифікації можна використовувати відношення вигляду

$$S(q_M) = S_E(q_M) + \frac{1}{S_S(q_M)} \rightarrow \min_{q_M \in Q_M}, \quad (12)$$

$$\text{де } S_E(q_M) = \sum_{x_i, x_j \in R_E(X)} |P_\delta(x_i, q_M) - P_\delta(x_j, q_M)|;$$

$$S_S(q_M) = \sum_{x_i, x_j \in R_S(X)} |P_\delta(x_i, q_M) - P_\delta(x_j, q_M)|.$$

Суть пропонуємого методу полягає в наступному. На заданій множині альтернатив  $X = \{x\}$  по значеннях  $K(x)$  одним з методів виділяється підмножина ефективних  $X^K \subseteq X$  [10]. ОПР попарно  $\langle u, v \rangle$  пред'являються альтернативи з виділеної підмножини ефективних  $u, v \in X^K$ . На основі характеристик  $K(u)$  і  $K(v)$  ОПР формує уявлення про їх відносну цінність  $y = \phi[K(u)]$ ,  $z = \phi[K(v)]$  і, таким

чином, відносить пару  $\langle u, v \rangle$  до одного з бінарних відносин: строгої переваги  $R_S(X)$ , нестрокої переваги  $R_{NS}(X)$  або еквівалентності  $R_E(X)$ . На підставі цього формуються переваги ОПР в одному з виглядів (5) – (7).

Інформація про значення  $K(u)$  і  $K(v)$  використовується для обчислення значень ФЗК  $P_\delta(x, q_M)$  по всіх класах моделей-претендентів  $\delta \in \Delta$  (1) – (4). Для кожної з моделей  $P_\delta(x, q_M)$ ,  $\delta \in \Delta$  на підставі відношень (5) – (7) і відповідних їм обмежень:

$$\forall x, y \in X^K: x \approx y \leftrightarrow P(x) = P(y);$$

$$x \succ y \leftrightarrow P(x) > P(y); \quad x \geq y \leftrightarrow P(x) \geq P(y)$$

формуються відповідні системи рівнянь і нерівностей. В результаті їх рішення знаходяться якнайкращі значення параметрів по всіх класах моделей  $q_M^0$  (1) – (4) і відповідні їм значення критеріїв точності моделей  $S_\delta(q_M^0)$ ,  $\delta \in \Delta$  (8) – (12). На основі результатів їх порівняння вибирається краща з моделей

$$\delta^0 = \arg \operatorname{extr}_{\delta \in \Delta} S_\delta(x, q_M^0). \quad (13)$$

Запропонований метод рішення задачі структурно-параметричної ідентифікації моделей багатофакторного оцінювання апробований, показав свою працездатність і ефективність на прикладах рішення практичних задач. При рішенні контрольних задач всі моделі виявилися адекватними і забезпечили повне відновлення початкових переваг  $R^0(X^K)$ , що представляються у вигляді (5). Мінімальну складність має адитивна модель (1), проте вона забезпечувала мінімальне значення сили переваги  $S$  (9). Максимальне значення критерію сили переваги набуте на адитивно-мультиплікативній моделі (9), побудованій на основі полінома Колмогорова-Габора. Проте, вона значно поступається всім іншим моделям за часом рішення задачі. Кращою по комплексному показнику «точність-складність» виявилася адитивно-мультиплікативна модель (4). Вона практично не поступається моделі (3) по значенню критерію ідентифікації, але мала менший час пошуку рішення приблизно в 7,8 разів.

## Висновки

Одержав подальший розвиток підхід компараторної ідентифікації в частині його застосування до рішення загальної задачі структурно-параметричного синтезу моделей багатофакторного оцінювання в класі адитивних, мультиплікативних і адитивно-мультиплікативних функцій загальної корисності. Сформульована постановка загального завдання структурно-параметричної ідентифікації моделей багатофакторного оцінювання, яка охоплює весь комплекс завдань, що виникають при синтезі моделей. На основі відомих схем компараторної параметричної

ідентифікації розроблена схема структурно-параметричної компараторної ідентифікації моделей багатofакторного оцінювання і вибору рішень, яка дозволяє, залежно від конкретної постановки завдання, вибирати вид моделі, параметри функцій корисності часткових критеріїв і функції загальної корисності.

Отримані результати можуть бути використані в системах проектування, управління, штучного інтелекту. Їх застосування дозволяє підвищити адекватність моделей багатofакторного оцінювання і вибору рішень, скоротити час прийняття рішень, підвищити їх якість. Напрямом подальших досліджень може бути аналіз ефективності моделей і методів рішення часткових задач з метою формування комплексів для вирішення задач структурно-параметричної ідентифікації ФЗК залежно від розмірності задач, необхідної точності, наявних обчислювальних і часових ресурсів.

### Список літератури

1. Фишберн П. Теория полезности // Исследование операций: В 2 т. Т.1: Методологические основы и математические методы / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби; Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – С. 448-480.
2. Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – К.: Наук. думка, 2002. – 164 с.
3. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
4. Бескорвайный В.В., Трофименко И.В. Параметрическая идентификация мультипликативных моделей для многофакторного выбора решений // 36. науч. праць ХУ ПС. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вып. 5 (5). – С. 74-78.
5. Петров Э.Г., Шило Н.С. Методика оценки адекватности моделей точечной идентификации индивидуальных предпочтений ЛПП // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – № 2. – С. 97-103.
6. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.
7. Петров Э.Г., Булавин Д.А., Петров К.Э. Использование метода генетических алгоритмов для решения задачи структурно-параметрической идентификации модели индивидуального многофакторного оценивания // Проблемы бионики. – 2004. – № 60. – С. 17-26.
8. Брахман Т.Р. Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. – М.: Радио и связь, 1984. – 287 с.
9. Петров Э.Г., Бескорвайный В.В., Пискалова В.П. Формирование функций полезности частных критериев в задачах многокритериального оценивания // Радиоэлектроника и информатика. – 1997. – № 1. – С. 71-73.
10. Бескорвайный В.В. Формирование множества эффективных вариантов при решении задач структурного синтеза территориально распределенных объектов // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – № 4. – С. 113-116.

Надійшла до редколегії 21.07.2006

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Є.В. Бодянский, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.