

УДК 531.534

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

Стаття присвячена розвитку дослідження крутильних коливань механічних систем, які моделюються як дискретні системи з великою кількістю ступенів свободи.

лінійні дискретні системи, крутильні коливання

У роботі [1] на основі методу динамічних жорсткостей (МДЖ) досліджувались лінійні коливання механічних систем з великою кількістю ступенів свободи для випадку згинальних коливань. При побудові рекурентних формул зв'язність системи здійснювалась за допомогою узагальнених координат.

У реальних умовах деякі конструкції літальних апаратів, агрегатів, механізмів та їх силових елементів можна розглядати як дискретні моделі, які мають

велику кількість ступенів свободи і здійснюють крутильні коливання.

До таких моделей можна звести багато інженерних задач, які пов'язані з крутильними коливаннями валів повітряних гвинтів, машин, безінерційних балок та ін. [2].

Розглянемо задачу побудови рекурентних залежностей для вивчення руху таких механічних систем на основі методу кінцевих елементів (МКЕ).

Метод МКЕ вміщує як ідею дискретизації, так і спосіб розв'язання поставленої задачі. Якщо дискретна модель вже побудована, то використання методу МКЕ значно спрощується. Це пов'язано з тим, що в ньому інакше організований обчислювальний процес, який базується на способі розв'язання системи лінійних рівнянь з матрицею відносно узагальнених координат.

Отримана раніше в роботі [1] система рівнянь (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} -Q_{k-1,k} &= C_{k-1,k} \cdot q_{k-1} + B_{k-1,k} \cdot q_k; \\ Q_{k,k+1} &= B_{k-1,k}^T \cdot q_{k-1} + D_{k-1,k} \cdot P_k. \end{aligned} \quad (1)$$

Запишемо дві системи рівнянь (1) для індексів K і $K+1$

$$\begin{aligned} -Q_{k-1,k} &= C_{k-1,k} \cdot q_{k-1} + B_{k-1,k} \cdot q_k; \\ Q_{k,k+1} &= B_{k-1,k}^T \cdot q_{k-1} + D_{k,k-1} \cdot q_k - P_k; \\ -Q_{k,k+1} &= C_{k,k+1} \cdot q_k + B_{k,k+1} \cdot q_{k+1}; \\ Q_{k+1,k+2} &= B_{k,k+1}^T \cdot q_k + D_{k+1,k} \cdot q_{k+1} - P_{k+1}. \end{aligned}$$

Додаючи два середніх рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} B_{k-1,k}^T \cdot q_{k-1} + (D_{k,k-1} + C_{k,k+1}) q_k + \\ + B_{k,k+1} \cdot q_{k+1} = P_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Послідовно запишемо рівняння системи (2) при $K = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} B_{0,1}^T \cdot q_0 + D_{1,0}^0 \cdot q_1 + B_{1,2} \cdot q_2 &= P_1; \\ B_{1,2}^T \cdot q_1 + D_{2,1}^0 \cdot q_2 + B_{2,3} \cdot q_3 &= P_2; \\ \dots & \\ B_{n-1,n}^T \cdot q_{n-1} + D_{n,n-1}^0 \cdot q_n + B_{n,n+1} \cdot q_{n+1} &= P_n. \end{aligned} \quad (3)$$

У системі (3), очевидно, $q_0 = q_{n+1} = 0$, а в матрицях $B_{0,1}^T, D_{1,0}^0, B_{n,n+1}$ жорсткості, які стикаються до першої та останньої маси ділянок, якщо вони вільні, покладаються рівними нулю, що фактично враховує початкові умови. Отримана система лінійних неоднорідних рівнянь з тридіагональною матрицею має єдиний розв'язок, якщо визначник матриці не дорівнює нулю. Визначити цей розв'язок можна будь-яким відомим з векторної алгебри методом. Завдяки великій розмірності матриці при розв'язанні системи використовуються спеціальні методи, які враховують її структуру.

Розглянемо застосування МКЕ для ланцюгової розподіленої системи із зв'язністю S -го порядку. При розрізанні в будь-якому місці моделі дія однієї частини на іншу потребує введення S незалежних параметрів, у яких переміщення є тільки однієї змінної x (одномірна задача). У цьому випадку кожний K -й кінцевий елемент (КЕ) має лише два вузли, переміщення в яких можна задати вектором – стовпцем.

$$\begin{aligned} q^k &= \{q_1^k, q_2^k\} \\ \text{де } q_j^k &= \{q_{j1}^k, q_{j2}^k, \dots, q_{js}^k\} \quad j=1,2. \end{aligned}$$

Таким чином, отримаємо:

$$q^k = \{q_{11}^k, q_{12}^k, \dots, q_{1s}^k, q_{21}^k, q_{22}^k, \dots, q_{2s}^k\}. \quad (4)$$

Уявимо переміщення $U^k(x)$ всіх точок K -того КЕ у вигляді комбінації вузлових значень узагальнених координат:

$$U^*(x) = U_1^k(x)q_1^k + U_2(x)q_2^k,$$

де $U_1^k(x), U_2^k(x)$ – інтерполяційні поліноми.

У більш детальному записі це співвідношення можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned} U^k(x) &= U_{11}^k(x)q_{11}^k + U_{12}^k(x)q_{12}^k + \\ &+ U_{21}^k(x)q_{21}^k + U_{22}^k(x)q_{22}^k. \end{aligned} \quad (5)$$

Усі поліноми, які входять до співвідношення (5), підбираються таким чином, щоб виконувались додаткові умови, зміст яких розглянемо на прикладі. Переміщення будь-якої точки системи при змінюванні x від нуля до ℓ представимо додатком функцій $U^k(x)$, кожна з яких визначена в інтервалі $x_{k-1} < x < x_k$ ($k = 1, \dots, n$) за формулою (5), а за межами цього інтервалу вона дорівнює нулю. Враховуючи, що початок системи координат кожного КЕ збігається з лівим вузлом x_{k-1} , запишемо

$$U(x) = \sum_{k=1}^n U^k(x). \quad (6)$$

Завдяки такому представленню невідомої функції $U(x)$ у вигляді лінійної комбінації переміщень вузлових точок $q_{11}^k, q_{12}^k, q_{21}^k, q_{22}^k$ ($k = 1, \dots, n$) можна, використовуючи варіаційні методи для знаходження невідомих величин, отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Методику використання МКЕ розглянемо на прикладі крутильних коливань складного торсіона.

Функцію кута обертання $\theta(x, t)$ будь-якого перерізу торсіона при вимушених коливаннях з періодом $\frac{2\pi}{P}$ без урахування опору можна, як відомо, визначити з умови обертання в нуль варіації функціонала:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \left[I(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - G I_p(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - M(x, t) \cdot \theta \right] dx dt, \quad (7)$$

де $I(x), G I_p$ – момент інерції і жорсткість на кручення відповідно.

Розглядаючи вимушені коливання від однієї гармоніки, представимо інтенсивність моменту у вигляді

$$M(x, t) = q(x) \sin \cdot P t,$$

де функція $q(x)$ вважається відомою.

При такому припущенні розв'язок можна шукати у вигляді:

$$Q(x, t) = U(x) \sin \cdot P t, \quad (8)$$

де $U(x)$ – форма вимушених коливань торсіона для даної частоти P вимушеної сили.

Підставляючи (8) до рівності (7) і визначаючи перший інтеграл, отримаємо функціонал:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & \frac{2S_1}{\pi P} \int_0^{\ell} \tilde{I}(x) U^2(x) dx - \\ & - \frac{1}{P^2} \int_0^{\ell} G I_P \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{P^2} \int_0^{\ell} q(x) \cdot U(x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

Так як крутильні коливання однозв'язні ($S = 1$) то, маючи на увазі, що кути обертання перерізу φ_k ($k = 1, \dots, n$) та враховуючи рівність (4), отримаємо $q^k = \{\varphi_{k-1}^k, \varphi_k^k\}$. Тоді співвідношення отримає вигляд:

$$U^k(x) = U_{11}^k(x)\varphi_{k-1} + U_{21}^k(x)\varphi_k, \quad 0 \leq x \leq \ell_k. \quad (10)$$

Підберемо інтерполюючи поліноми таким чином, щоб виконувались умови: $U^k(0) = \varphi_{k-1}$, $U^k(\ell_k) = \varphi_k$. Для цього їх можна записати у вигляді.

$$U_{11}^k = \frac{(\ell_k - x)}{\ell_k}; \quad U_{21}^k = \frac{x}{\ell_k}.$$

При записі цих формул мається на увазі, що відлік координати x відбувається від лівого ($k-1$) вузла КЕ.

Тоді форму крутильних коливань, згідно із (6) можна записати таким чином

$$U(x) = \sum_{k=1}^n [U_{11}^k(x)\varphi_{k-1} + U_{21}^k(x)\varphi_k], \quad (11)$$

де кожна функція $U_{11}^k(x)$, $U_{21}^k(x)$ відрізняється від нуля лише в межах k -го КЕ, тобто в загальній системі координат при $x_{k-1} \leq x < x_k$.

Підставляючи значення (11) до рівності (9) після простих перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & \sum_{k=1}^n \frac{1}{\ell_k} \left\{ \int_0^{\ell_k} \tilde{I}(x) [(\ell_k - x)\varphi_{k-1} + x\varphi_k]^2 dx - \right. \\ & - \frac{1}{P^2} \int_0^{\ell_k} G \cdot I_P^k(x) (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 dx - \\ & \left. - \frac{1}{P^2} \int_0^{\ell_k} q^k(x) \cdot [(\ell_k - x)\varphi_k + x\varphi_{k-1}] dx \right\}. \end{aligned}$$

Визначаючи похідну від \tilde{S}_1 по φ_k і враховуючи, що φ_k входять тільки до складаючих під знаками інтегралів, отримаємо

$$\begin{aligned} a_{k,k-1} \varphi_{k-1} + a_{k,k} \varphi_k + a_{k,k+1} \varphi_{k+1} = B_k, \\ k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} a_{k,k-1} = & \frac{1}{\ell_k} \int_0^{\ell_k} I^k(x) (\ell_k - x) x dx + \frac{G}{P^2 \ell_k} \int_0^{\ell_k} I_P^k(x) dx; \\ a_{k,k} = & \frac{1}{\ell_k} \tilde{I}^k(x) \cdot x^2 dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{\ell_{k+1}} \int_0^{\ell_{k+1}} \tilde{I}^{k+1}(x) (\ell_{k+1} - x)^2 dx - \frac{G}{P^2 \ell_k} \int_0^{\ell_k} I_P^k(x) dx - \\ - \frac{G}{P^2 \ell_{k+1}} \int_0^{\ell_{k+1}} I_P^{k+1}(x) dx; \\ a_{k,k+1} = & \frac{1}{\ell_{k+1}} \int_0^{\ell_{k+1}} \tilde{I}(x) \cdot (x - \ell_{k+1}) x \cdot dx + \\ & + \frac{G}{P^2 \ell_{k+1}}; \\ e_k = & \frac{G}{P^2 \ell_k} \int_0^{\ell_k} q^k(x) x \cdot dx + \\ & + \frac{1}{P^2 \ell_{k+1}} \int_0^{\ell_{k+1}} q^{k+1}(x) (\ell_{k+1} - x) dx. \end{aligned}$$

Система рівнянь (12) розв'язується однозначно при наданні граничних умов (φ_0 і φ_n) та при умові, що визначник цієї системи відрізняється від нуля. Ця умова завжди виконується в системі без урахування сил опору, якщо значення P не збігається з жодним значенням власних частин.

Порівняння розглянутих методів показує, що кожний з них має переваги для одних систем і недоліки – для інших. МДЖ легко узагальнюється для системи з проміжними нерухомими точками. Одним із суттєвих його недоліків є наявність операції перетворення матриць, а також те, що частотне рівняння містить у лівій частині функції з асимптотами.

З проведених досліджень можна зробити висновки: головною перевагою МКЕ є можливість автоматичної дискретизації практично будь-яких розподілених механічних систем. На різницю від цього в методі МДЖ ця операція здійснюється окремо або навіть не здійснюється зовсім. В останньому випадку основні співвідношення повинні бути записані після отримання аналітичного розв'язання рівнянь у часткових похідних, що можливо лише для простих елементів. До недоліків МКЕ слід віднести необхідність виконання операцій з матрицями високого порядку.

Список літератури

1. Юрченко О.О. Деякі питання вивчення руху коливальних систем з великою кількістю ступенів свободи // Зб. наук. пр. ХУПС. – Х.: ХУПС. – 2005. – Вип. 2 (2). – С. 43-44.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Высшая школа, 1959. – 439 с.

Надійшла до редакції 7.08.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.О. Сало, Харківський інститут Внутрішніх військ, Харків.