УДК 531.534

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

Стаття присвячена розвитку дослідження крутильних коливань механічних систем, які моделюються як дискретні системи з великою кількістю ступенів свободи.

лінійні дискретні системи, крутильні коливання

У роботі [1] на основі методу динамічних жорсткостей (МДЖ) досліджувались лінійні коливання механічних систем з великою кількістю ступенів свободи для випадку згинальних коливань. При побудові рекурентних формул зв`язність системи здійснювалась за допомогою узагальнених координат.

У реальних умовах деякі конструкції літальних апаратів, агрегатів, механізмів та їх силових елементів можна розглядати як дискретні моделі, які мають велику кількість ступенів свободи і здійснюють крутильні коливання.

До таких моделей можна звести багато інженерних задач, які пов`язані з крутильними коливаннями валів повітряних гвинтів, машин, безінерційних балок та ін. [2].

Розглянемо задачу побудови рекурентних залежностей для вивчення руху таких механічних систем на основі методу кінцевих елементів (МКЕ).

Метод МКЕ вміщує як ідею дискретизації, так і спосіб розв`язання поставленої задачі. Якщо дискретна модель вже побудована, то використання методу МКЕ значно спрощується. Це пов`язано з тим, що в ньому інакше організований обчислювальний процес, який базується на способі розв`язання системи лінійних рівнянь з матрицею відносно узагальнених координат.

Отримана раніше в роботі [1] система рівнянь (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} -Q_{k-1,k} &= C_{k-1,k}\cdot q_{k-1} + B_{k-1,k}\cdot q_k; \\ Q_{k,k+1} &= B^{T}_{k-1,k}\cdot q_{k-1} + D_{k-1,k}\cdot P_k. \end{aligned} \qquad (1)$$

Запишемо дві системи рівнянь (1) для індексів К і К+1

$$\begin{aligned} -Q_{k-1,k} &= C_{k-1,k}\cdot q_{k-1} + B_{k-1,k}\cdot q_k; \\ Q_{k,k+1} &= B^{T}_{k-1,k}\cdot q_{k-1} + D_{k,k-1}\cdot q_k - P_k; \\ -Q_{k,k+1} &= C_{k,k+1}\cdot q_k + B_{k,k+1}\cdot q_{k-1}; \\ Q_{k+1,k+2} &= B^{T}_{k,k+1}\cdot q_k + D_{k+1,k}\cdot q_{k+1} - P_{k-1}. \end{aligned}$$

Додаючи два середніх рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} B^{T}_{k-1,k}\cdot q_{k-1} + \left(D_{k,k-1} + C_{k,k+1}\right)q_k + \\ + B_{k,k+1}\cdot q_{k+1} = P_k. \end{aligned} \qquad (2)$$

Послідовно запишемо рівняння системи (2) при К = 1, ..., n:

$$\begin{aligned} &B^{T}_{0,1}\cdot q_0 + D^{0}_{1,0}\cdot q_1 + B_{1,2}\cdot q_2 = P_1; \\ &B^{T}_{1,2}\cdot q_1 + D^{0}_{2,1}\cdot q_2 + B_{2,3}\cdot q_3 = P_2; \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &B^{T}_{n-1,n}\cdot q_{n-1} + D^{0}_{n,n-1}\cdot q_n + B_{n,n+1}\cdot q_{n+1} = P_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

У системі (3), очевидно, $q_0 = q_{n-1} = 0$, а в матрицях $B^{T}_{0,1}, D^{0}_{1,0}, B_{n,n+1}$ жорсткості, які стикуються до першої та останньої маси ділянок, якщо вони вільні, покладаються рівними нулю, що фактично враховує початкові умови. Отримана система лінійних неоднорідних рівнянь з тридіагональною матрицею має єдиний розв`язок, якщо визначник матриці не дорівнює нулю. Визначити цей розв`язок можна будь-яким відомим з векторної алгебри методом. Завдяки великій розмірності матриці при розв`язанні системи використовуються спеціальні методи, які враховують її структуру.

Розглянемо застосування МКЕ для ланцюгової розподіленої системи із зв`язністю S-го порядку. При розрізанні в будь-якому місці моделі дія однієї частини на іншу потребує введення S незалежних параметрів, у яких переміщення є тільки однієї змінної x (одномірна задача). У цьому випадку кожний К-й кінцевий елемент (КЕ) має лише два вузли, переміщення в яких можна задати вектором – стовпцем.

$$q^{k} = \left\{q^{k}_{1}, q^{k}_{2}\right\},$$

де $q^{k}_{j} = \left\{q^{k}_{j1}, q^{k}_{j2}, \ldots, q^{k}_{jS}\right\}, \quad j = 1{,}2$.

Таким чином, отримаємо:

$$q^{k} = \left\{q^{k}_{11}, q^{k}_{12}, \ldots, q^{k}_{1S}, q^{k}_{21}, q^{k}_{22}, \ldots, q^{k}_{2S}\right\}. \qquad (4)$$

Уявимо переміщення $U^{k}(x)$ всіх точок К-того КЕ у вигляді комбінації вузлових значень узагальнених координат:

$$U^{*}(x) = U^{k}_{1}(x)q^{k}_{1} + U_{2}(x)q^{k}_{2},$$

де $U^{k}_{1}(x), U^{k}_{2}(x)$ – інтерполяційні поліноми.

У більш детальному записі це співвідношення можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned} U^{k}(x) = U^{k}_{11}(x)q^{k}_{11} + U^{k}_{12}(x)q^{k}_{12} + \\ + U^{k}_{21}(x)q^{k}_{21} + U^{k}_{22}(x)q^{k}_{22}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Усі поліноми, які входять до співвідношення (5), підбираються таким чином, щоб виконувались додаткові умови, зміст яких розглянемо на прикладі. Переміщення будь-якої точки системи при змінюванні x від нуля до ℓ представимо додатком функцій $U^{k}(x)$, кожна з яких визначена в інтервалі $x_{k-1} < x < x_k$ (k = 1, …, n) за формулою (5), а за межами цього інтервалу вона дорівнює нулю. Враховуючи, що початок системи координат кожного КЕ збігається з лівим вузлом x_{k-1}, запишемо

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} U^{k}(x). \qquad (6)$$

Завдяки такому представленню невідомої функції U(x) у вигляді лінійної комбінації переміщень вузлових точок $q^{k}_{11}, q^{k}_{12}, q^{k}_{21}, q^{k}_{22}$ (k = 1, …, n) можна, використовуючи варіаційні методи для знаходження невідомих величин, отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Методику використання МКЕ розглянемо на прикладі крутильних коливань складного торсіона.

Функцію кута обертання θ(*x*, t) будь-якого перерізу торсіона при вимушених коливаннях з періодом $\frac{2\pi}{P}$ без урахування опору можна, як відомо, визначити з умови обертання в нуль варіації функціонала:

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\ell}\left[\begin{matrix} I(x)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right)^{2} - GI_{P}(x)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)^{2} - \\ -M(x,\ t)\cdot\theta \end{matrix}\right]dx\,dt, \qquad (7)$$

де I(*x*), G I_{ρ} – момент інерції і жорсткість на кручення відповідно.

Розглядаючи вимушені коливання від однієї гармоніки, представимо інтенсивність моменту у вигляді

$$M(x,\ t) = q(x)\sin\cdot Pt,$$

де функція q(x) вважається відомою.

При такому припущенні розв`язок можна шукати у вигляді:

$$Q(x,\ t) = U(x)\sin\cdot Pt, \qquad (8)$$

де U(x) – форма вимушених коливань торсіона для даної частоти P вимушеної сили.

Підставляючи (8) до рівності (7) і визначаючи перший інтеграл, отримаємо функціонал:

$$\tilde{S} = \frac{2S_1}{\pi P}\int_0^{\ell}\tilde{I}(x)\,U^2(x)dx - -\frac{1}{P^2}\int_0^{\ell} GI_P\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{P^2}\int_0^{\ell} q(x)\cdot U(x)dx \qquad (9)$$

Так як крутильні коливання однозв`язні (S = 1) то, маючи на увазі, що кути обертання перерізу φk (k = 1, …, n) та враховуючи рівність (4), отримаємо $q^k = \left\{\varphi^k_{k-1}, \varphi^k_k\right\}$. Тоді співвідношення отримає вигляд:

$$U^k(x) = U^k_{11}(x)\varphi_{k-1} + U_{21}(x)\varphi_k, \quad 0 \le x \le \ell_k. \qquad (10)$$

Підберемо інтерполюючи поліноми таким чином, щоб виконувались умови: $U^k(0) = \varphi_{k-1}$, $U^k(\ell_k) = \varphi_k$. Для цього їх можна записати у вигляді.

$$U^k_{11} = \frac{(\ell_k - x)}{\ell_k}; \quad U^k_{21} = \frac{x}{\ell}.$$

При записі цих формул мається на увазі, що відлік координати х відбувається від лівого (к-1) вузла КЕ.

Тоді форму крутильних коливань, згідно із (6) можна записати таким чином

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[U^k_{11}(x)\varphi_{k-1} + U^k_{21}(x)\varphi_k\right], \qquad (11)$$

де кожна функція $U^k_{11}(x), U^k_{21}(x)$ відрізняється від нуля лише в межах К-го КЕ, тобто в загальній системі координат при $x_{k-1} \le x < x_k$.

Підставляючи значення (11) до рівності (9) після простих перетворювань отримаємо

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ell_k}\left\{\int_0^{\ell_k}\tilde{I}(x)\left[(\ell_k - x)\varphi_{k-1} + x\varphi_k\right]^2 dx - \right.$$
$$-\frac{1}{P^2}\int_0^{\ell_k} G\cdot I^k_P(x)(\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 dx -$$
$$\left.-\frac{1}{P^2}\int_0^{\ell_k} q^k(x)\cdot\left[(\ell_k - x)\varphi_k + x\varphi_k\right]dx.\right\}$$

Визначаючи похідну від $\tilde{S}_1$ по φ_k і враховуючи, що φ_k входять тільки до складаючих під знаками інтегралів, отримаємо

$$a_{k,k-1}\,\varphi_{k-1} + a_{k,k}\,\varphi_k + a_{k,k+1}\,\varphi_{k+1} = в_k,$$
$$k = 1, \ldots, n, \qquad (12)$$

де

$$a_{k,k-1} = \frac{1}{\ell_k}\int_0^{\ell_k} I^k(x)(\ell_k - x)x dx + \frac{G}{P^2\ell_k}\int_0^{\ell} I^k_P(x)dx;$$

$$a_{k,k} = \frac{1}{\ell_k}\tilde{I}^k(x)\cdot x^2 dx +$$
$$+\frac{1}{\ell_{k+1}}\int_0^{\ell_{k-1}}\tilde{I}^{k+1}(x)(\ell_{k+1} - x)^2 dx - \frac{G}{P^2\ell_k}\int_0^{\ell} I^k_P(x)dx -$$
$$-\frac{G}{P^2\ell_{k+1}}\int_0^{\ell_{k+1}} I^{k+1}_P(x)dx;$$

$$a_{k,k+1} = \frac{1}{\ell_{k+1}}\int_0^{\ell_{k+1}}\tilde{I}(x)\cdot(x - \ell_{k+1})x\cdot dx +$$
$$+\frac{G}{P^2\ell_{k+1}};$$

$$в_k = \frac{G}{P^2\ell_k}\int_0^{\ell_k} q^k(x)x\cdot dx +$$
$$+\frac{1}{P^2\ell_{k+1}}\int_0^{\ell_{k+1}} q^{k+1}(x)(\ell_{k+1} - x)dx.$$

Система рівнянь (12) розв`язується однозначно при наданні граничних умов (φ0 і φn) та при умові, що визначник цієї системи відрізняється від нуля. Ця умова завжди виконується в системі без урахування сил опору, якщо значення Р не збігається з жодним значенням власних частин.

Порівняння розглянутих методів показує, що кожний з них має переваги для одних систем і недоліки – для інших. МДЖ легко узагальнюється для системи з проміжними нерухомими точками. Одним із суттєвих його недоліків є наявність операції перетворення матриць, а також те, що частотне рівняння містить у лівій частині функції з асимптотами.

З проведених досліджень можна зробити висновок: головною перевагою МКЕ є можливість автоматичної дискретизації практично будь-яких розподілених механічних систем. На різницю від цього в методі МДЖ ця операція здійснюється окремо або навіть не здійснюється зовсім. В останньому випадку основні співвідношення повинні бути записані після отримання аналітичного розв`язання рівнянь у часткових похідних, що можливо лише для простих елементів. До недоліків МКЕ слід віднести необхідність виконання операцій з матрицями високого порядку.

Список літератури

1. *Юрченко О.О. Деякі питання вивчення руху коливальних систем з великою кількістю ступенів свободи // Зб. наук. пр. ХУПС. – Х.: ХУПС. – 2005. – Вип. 2 (2). – С. 43-44.*

2. *Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Высшая школа, 1959. – 439 с.*

Надійшла до редколегії 7.08.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.О. Сало, Харківський інститут Внутрішніх військ, Харків.