УДК 681.1 : 538.3 : 535.8 : 534.2 : 530.1 : 519.24

А.В. Статкус

*Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА АНСАМБЛЯ УСКОРЕННЫХ ЧАСТИЦ

*Статистическая динамика ансамбля ускоренных частиц исследуется в смысле обусловленной ускорением эволюции состояния ансамбля для случая равноускоренного коллинеарного движения формирующих его частиц вдоль оси цилиндра. Эволюционные соотношения для текущей характеристической функции получены в виде линейного интегрального преобразования плотности распределения ансамбля в начальный момент времени.*

***Ключевые слова:*** *ансамбль частиц, ускорение, эволюция состояния, нестационарность.*

## Введение

Состояние совокупности, или ансамбля частиц в статистической физике и приложениях принято характеризовать статистическими свойствами ансамбля, в первую очередь распределениями положения и скорости частиц, корреляционными и прочими моментными функциями [1 – 4]. По ряду причин состояние ансамбля может изменяться во времени, или эволюционизировать. Эта эволюция приводит к нестационарности и неоднородности среды в окрестности ансамбля и в значительной степени определяет физические свойства среды в задачах распространения, дифракции и рассеяния излучения любой природы [1, 2, 5 – 7]. Эволюция состояния ансамбля была предметом многих исследований. Библиографический обзор имеется в [8] и приведенных там ссылках.

Эволюция распределения скорости ансамбля применительно к броуновскому движению как переходу к равновесному состоянию, рассматривалась Пригожиным [4] в контексте неравновесной статистической механики. Им получено выражение для плотности распределения скорости в зависимости от времени как решение некоторого дифференциального уравнения (уравнения диффузии Крамерса), которое выводится из уравнения Фоккера-Планка на основе теории возмущений. Частное решение, удовлетворяющее конкретным начальным условиям, записывается двояко: в виде линейной комбинации собственных функций уравнения диффузии и через функцию Грина этого уравнения.

В ряде практически важных случаев ансамбль находится под воздействием внешних сил, что делает его движение ускоренным. Кровоток в сосудах, импульсное течение жидкостей и газов, течение в криволинейных сосудах и трубах, движение облаков дипольных отражателей и прочих пространственно распределенных неоднородностей среды в тех или иных условиях проявляют ускоренный характер. По этой причине закономерности обусловленных ускорением изменений статистических свойств ансамбля, или кинематической эволюции состояния ансамбля ускоренных частиц нуждаются в систематическом исследовании.

Работа [9] посвящена коллективным эффектам в плотных ансамблях ускоренных заряженных частиц. В [10] рассмотрена динамика ансамбля частиц в условиях, когда границы среды зависят от времени, а частицы ансамбля претерпевают отражения от них. Изучается индуцированное таким взаимодействием ансамбля с границей ускорение (ускорение Ферми) и явление обусловленного им разделения частиц ансамбля. В [11] исследуются процессы ускорения частиц солнечными вспышками. Предложена модель ускорения частиц, учитывающая действие постоянного электрического поля в плазме, явление магнитного воссоединения, ударные и турбулентные механизмы, а также случайное ускорение магнитного поля магнито-акустическими волнами. В [12] исследована динамика ансамблей частиц в условиях турбулентности и проанализировано влияние конечных размеров частиц на свойства эволюции состояния.

В настоящей статье кинематическая эволюция состояния ансамбля ускоренных частиц изучается в терминах распределений положения и скорости частиц ансамбля в одном частном случае ламинарного равноускоренного движения. Такой выбор основан на том, что при малых интервалах эволюции сколь угодно сложный характер ускорения может быть сведен к постоянному ускорению. При этом основные свойства и следствия ускоренного движения, а значит и кинематической эволюции состояния ансамбля, сохраняются. На эту замечательную особенность равноускоренного движения обратил внимание В.Л.Гинзбург [13, с46], отметив, что «характер излучения при равноускоренном движении радикально отличается от равномерного, но при этом ничем в качественном отношении не отличается от излучения при произвольно ускоренном движении».

**Целью статьи** является вывод эволюционных уравнений, связывающих состояние ансамбля ускоренных частиц в произвольный момент времени с его начальным состоянием.

Остальная часть статьи построена по следующему плану. В разделе 1 формулируются постановка задачи и условия, в первом приближении сохраняющие ее физичность. В разделе 2 обсуждаются два важнейших свойства состояния ансамбля, обусловленных выбранной постановкой – фактическая одномерность задачи (эволюция состояния происходит вдоль некоторой оси) и взаимная независимость продольных составляющих распределения положения, скорости и ускорения ансамбля в начальный момент времени. В разделах 3 и 4 на основе элементарных методов теории вероятностей (понятия характеристической функции распределения и функциональных преобразований случайных величин) выводятся эволюционные уравнения для текущих распределений скорости и положения ансамбля. В заключение статьи в разделе 5 формулируются некоторые выводы и планируемые направления использования эволюционных уравнений в дальнейших исследованиях.

## 1. Постановка задачи

Исследование статистической динамики ансамбля ускоренных частиц выполняется на идеализированной модельной задаче. В этом качестве выбирается по возможности простая постановка, чтобы, с одной стороны, второстепенные детали не усложняли анализ и не скрывали свойства решения, определяемые эффектами ускорения, а, с другой стороны, сохранялась физичность исследуемого явления.

Пусть имеется некоторый цилиндр, внутри которого действует однородное вдоль оси $z$ потенциальное поле. Сила в произвольном поперечном сечении цилиндра имеет распределение

$$F(x,y)=\mathrm{const}(z),$$

именуемое ниже профилем. Внутрь цилиндра помещается ансамбль частиц. Полагаем, что все частицы ансамбля движутся коллинеарно в продольном направлении $z$ без отражения от стенок и пристеночного замедления. Частицы малы настолько, что положение одной из них не влияет на возможное положение другой, то есть ансамбль предполагается разряженным с большими межчастичными расстояниями: частицы полагаются идентичными во всех своих свойствах кроме положения, скорости и ускорения. Положения и скорости соседних частиц считаются случайными и некоррелированными. Ускорение каждой частицы не зависит от времени и задается ее положением и силовым профилем $F$. В начальный момент времени $t=0$, когда ансамбль попадает в поле внутри цилиндра, состояние задается плотностями распределения положения $p_{p(0)}(x,y,z)$, скорости $p_{v(0)}(v_x,v_y,v_z)$ и ускорения $p_{a(0)}(a_x,a_y,a_z)$. Необходимо определить состояние ансамбля при $0\le t\le T$, где $T$ – некоторый интервал.

## 2. Вывод начального состояния ансамбля

Сформулированная выше задача нуждается в уточнении понятия состояния ансамбля ускоренных частиц вообще и начального состояния в частности.

**Одномерность эволюции состояния**. Введем обозначения «$\perp$» и «$\|$» для поперечных и продольных составляющих. Поскольку движение частиц ансамбля имеет строго продольный характер, и перемещения в поперечном направлении отсутствуют, то поперечное распределение положения ансамбля при такой постановке не зависит от времени на $0\le t\le T$:

$p_{\perp p(t)}(x,y)=p_{\perp p(0)}(x,y)$, а поперечные распределения скорости и ускорения на $0\le t\le T$ постоянны по $t$ и сингулярны по поперечным составляющим

$$p_{\perp v(t)}(v_x,v_y)=p_{\perp v(0)}(v_x,v_y)=\delta(v_x,v_y),$$

$$p_{\perp a(t)}(a_x,a_y)=p_{\perp a(0)}(a_x,a_y)=\delta(a_x,a_y).$$

Таким образом, в этом случае распределения скорости и ускорения при $t=0$ определяются их продольными составляющими

$$p_{v(0)}(v_x,v_y,v_z)=\delta(v_x,v_y)p_{\|v(0)}(v_z),$$

$$p_{a(0)}(a_x,a_y,a_z)=\delta(a_x,a_y)p_{\|a(0)}(a_z),$$

а эволюция состояния ансамбля исчерпывается зависимостью от $t$ продольных составляющих распределения положения $p_{\|z(t)}(z)=p_{\|z}(z;t)$ и скорости $p_{\|v(t)}(v_z)=p_{\|v}(v_z;t)$ при неизменном по $t$ распределении продольной составляющей ускорения $p_{\|a(t)}(a_z)=p_{\|a(0)}(a_z)=p_{\|a}(a_z;0)$, $0\le t\le T$. Эти зависимости и надлежит найти.

**Взаимная независимость продольных составляющих положения, скорости и ускорения.** Продольная составляющая скорости при $t=0$ не зависит от продольных координат положения и ускорения. В отношении последних можно предположить наличие корреляции, поскольку в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение каждой частицы зависит от ее положения. Простые рассуждения показывают, однако, что в условиях сформулированной выше модельной задачи они также оказываются взаимно независимыми. Продольное ускорение частицы массой $m$ в точке $M$ с координатами $(x_M,y_M,z_M)$ в случае силового профиля $F(x,y)=\mathrm{const}(z)$ не зависит от ее положения на оси $z$ и составляет $a_M=F(x_M,y_M)/m$.

Следовательно, при произвольном трехмерном распределении положения ансамбля продольное распределение ускорения $p_{\|a(0)}(a_z)$ определяется только профилем силы $F(x,y)$ и поперечным распределением положения частиц $p_{\perp p(0)}(x,y)$ и не зависит от распределения продольной координаты положения $p_{\|z(0)}(z)$. Таким образом, продольные составляющие распределений положения, скорости и ускорения ансамбля при $t=0$ оказываются взаимно независимыми, а их совместная плотность факторизуется

$$p_{\|pva(0)}(z,v_z,a_z)=p_{\|z(0)}(z)p_{\|v(0)}(v_z)p_{\|a(0)}(a_z), \quad (1,а)$$

как и совместная плотность скорости и ускорения

$$p_{\|va(0)}(v_z,a_z)=p_{\|v(0)}(v_z)p_{\|a(0)}(a_z). \quad (1,б)$$

Поскольку далее в статьи используются только продольные составляющие распределений, ниже символ «||» опускается.

## 3. Эволюция распределения скорости

Основываясь на равноускоренном движении каждой частицы, представим продольную составляющую скорости ансамбля $v_z(t)$ в момент $t$ в виде суммы его начальной скорости $v_z(0)$ и приращения $\Delta v$, обусловленного ускорением $a_z(0)$ и длительностью $t$ воздействия сил на ансамбль

$$v_z(t)=v_z(0)+\Delta v, \quad (2)$$

$$\Delta v=a_z(0)\cdot t. \quad (3)$$

Найдем распределение приращения скорости $\Delta v$ как линейной функции случайной величины $a_z(0)$ [14, 15]

$$p_{\Delta v}(\zeta_z)=\frac{1}{t}p_{a(0)}\left(\frac{\zeta_z}{t}\right), \quad (4)$$

то есть распределение $\Delta v$ с точностью до зависимых от времени параметров повторяет закон распределения $a_z(0)$. Следствием независимости начальных скорости и ускорения является независимость слагаемых в (2). Поэтому распределение величины (2) представляет собой композицию распределений слагаемых, то есть свертку их плотностей [14, 15]

$$p_{v(t)}(v_z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{v(0)}(v_z-\zeta_z)p_{\Delta v}(\zeta_z)d\zeta_z. \quad (5)$$

Переходя к характеристическим функциям случайных величин, из (5) получаем [14, 15]

$$\chi_{v(t)}(j\theta)=\chi_{v(0)}(j\theta)\cdot\chi_{\Delta v}(j\theta). \quad (6)$$

Выразим левую часть (6) через начальное условие $p_{va(0)}(v_z,a_z)$ – совместную плотность (1, б).

Непосредственное применение определения характеристической функции к (6) дает

$$\chi_{v(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{v(0)}(v_z)e^{j\theta v_z}dv_z\cdot\int_{-\infty}^{\infty}p_{\Delta v}(\zeta_z)e^{j\theta\zeta_z}d\zeta_z. \quad (7)$$

Учитывая (4) в (7), приводим его к виду

$$\chi_{v(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{v(0)}(v_z)e^{j\theta v_z}dv_z\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t}p_{a(0)}\left(\frac{\zeta_z}{t}\right)\right]e^{j\theta\zeta_z}d\zeta_z.$$

Вводя замену переменных $\xi_z=\zeta_z/t$ в интеграле по $\zeta_z$, переписываем его как

$$\chi_{\Delta v}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[p_{a(0)}(\xi_z)\right]e^{j\theta\xi_z t}d\xi_z, \quad (8)$$

что для (7) дает

$$\chi_{v(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{v(0)}(v_z)e^{j\theta v_z}dv_z\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{a(0)}(\xi_z)e^{j\theta\xi_z t}d\xi_z. \quad (9)$$

Окончательно получаем

$$\chi_{v(t)}(j\theta)=\chi_v(j\theta,t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{va(0)}(v_z,\xi_z)e^{j\theta(v_z+\xi_z t)}dv_z\,d\xi_z. \quad (10)$$

Выражение (10) определяет эволюцию распределения скорости ансамбля при начальном условии, наложенном на распределение скорости и ускорения ансамбля. Оно представляет собой двумерное по скорости $v_z$ и ускорению $a_z$ линейное интегральное преобразование $T_v$ совместной плотности их распределения при $t=0$ (1б) с зависимым от времени ядром $K_v(\theta;v_z,a_z,t)=\exp\left[j\theta(v_z+a_z t)\right]$:

$$\chi_{v(t)}(j\theta,t)=T_v\left\{p_{va(0)}(v_z,a_z)\right\}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{va(0)}(v_z,a_z)K_v(\theta;v_z,a_z,t)dv_z\,da_z. \quad (11)$$

Переходя в (11) к плотностям, имеем

$$p_{v(t)}(v_z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{v(t)}(j\theta,t)e^{-j\theta v_z}d\theta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{va(0)}(v_z,a_z)\times\right.$$
$$\left.\times\ e^{j\theta[v'_z+a_z t]}\,dv'_z\,da_z\right]e^{-j\theta v_z}d\theta. \quad (12)$$

Изменение в (12) порядка интегрирования дает

$$p_{v(t)}(v_z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{va(0)}(v'_z,a_z)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\theta\left[v_z-v'_z-a_z t\right]}d\theta\right]dv'_z\,da_z\,. \qquad (13)$$

Имея в виду, что интеграл в квадратных скобках есть дельта-функция $\delta\left(v_z-v'_z-a_z t\right)$, с учетом ее фильтрующего свойства при интегрировании по $v'_z$ получаем

$$p_{v(t)}\left(v_z\right)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{va(0)}\left(v_z-a_z t, a_z\right)da_z\,. \qquad (14)$$

Как следует из (14), текущая плотность распределения продольной скорости ансамбля в произвольный момент $t$ представляет собой результат усреднения плотности совместного распределения скорости и ускорения в момент $t=0$ по второй переменной – ускорению, тогда как ее первая переменная – скорость – подвергнута предварительному смещению на величину, зависящую от ускорения в соответствии с законом равноускоренного движения (2). Заметим, что (14) сохраняет справедливость и при $t=0$, вырождаясь в обычную формулу связи соответствующего маргинального распределения с совместным.

## 4. Эволюция распределения координаты

Рассмотрим эволюцию распределения продольной координаты положения ансамбля при выбранных условиях. Продольная координата частиц ансамбля в момент $t$ задается выражением

$$z(t)=z(0)+v_z(0)\cdot t+\frac{1}{2}a_z(0)\cdot t^2=$$
$$=z(0)+\Delta z_v+\Delta z_a\,. \qquad (15)$$

Распределение слагаемых (15) по аналогии с (4) получаем в виде

$$p_{\Delta z_v}\left(\phi_z\right)=\frac{1}{t}p_{v(0)}\left(\frac{\phi_z}{t}\right), \qquad (16,а)$$

$$p_{\Delta z_a}\left(\mu_z\right)=\frac{2}{t^2}p_{a(0)}\left(\frac{2\mu_z}{t^2}\right). \qquad (16,б)$$

Учитывая (1,а), устанавливаем взаимную независимость всех слагаемых суммы (15). Тогда распределение положения ансамбля в момент $t$ есть композиция распределений $z(0)$, $\Delta z_v$ и $\Delta z_a$. Переходя к характеристическим функциям, для $z(t)$ имеем

$$\chi_{z(t)}(j\theta)=\chi_{z(0)}(j\theta)\cdot\chi_{\Delta z_v}(j\theta)\cdot\chi_{\Delta z_a}(j\theta), \qquad (17)$$

или

$$\chi_{z(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{z(0)}(z)e^{j\theta z}dz\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{\Delta z_v}\left(\phi_z\right)e^{j\theta\phi_z}d\phi_z\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{\Delta z_a}\left(\mu_z\right)e^{j\theta\mu_z}d\mu_z\,. \qquad (18)$$

В терминах распределений положения, скорости и ускорения с учетом (16) получаем

$$\chi_{z(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{z(0)}(z)e^{j\theta z}dz\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{v(0)}\left(\frac{\phi_z}{t}\right)e^{j\theta\phi_z}\frac{d\phi_z}{t}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{a(0)}\left(\frac{\mu_z}{t^2/2}\right)e^{j\theta\mu_z}\frac{d\mu_z}{t^2/2}, \qquad (19)$$

что заменой переменных $\psi_z=\phi_z/t$, $\eta_z=2\mu_z/t^2$ во втором и третьем интеграле сводится к

$$\chi_{z(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{z(0)}(z)e^{j\theta z}dz\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{v(0)}\left(\psi_z\right)e^{j\theta\psi_z t}d\psi_z\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}p_{a(0)}\left(\eta_z\right)e^{j\theta\eta_z\frac{t^2}{2}}d\eta_z\,. \qquad (20)$$

Группируя плотности и ядра, окончательно получаем

$$\chi_{z(t)}(j\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{pva(0)}\left(z,\psi_z,\eta_z\right)\times$$
$$\times e^{j\theta\left[z+\psi_z t+\eta_z\frac{t^2}{2}\right]}dz\,d\psi_z\,d\eta_z\,. \qquad (21)$$

Выражение (21) определяет эволюцию распределения координаты ансамбля при начальном условии, наложенном на распределение положения, скорости и ускорения ансамбля. Оно представляет собой трехмерное по координате $z$, скорости $v_z$ и ускорению $a_z$ линейное интегральное преобразование $T_z$ заданной (1а) совместной плотности их распределения при $t=0$ с зависимым от времени ядром

$$K_z\left(\theta;z,v_z,a_z,t\right)=\exp\left[j\theta\left(z+v_z t+a_z\frac{t^2}{2}\right)\right]:$$

$$\chi_{z(t)}(j\theta,t)=T_z\left\{p_{pva(0)}\left(z,v_z,a_z\right)\right\}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{pva(0)}\left(z,v_z,a_z\right)\times$$
$$\times K_z\left(\theta;z,v_z,a_z,t\right)dz\,dv_z\,da_z\,. \qquad (22)$$

Переходя в (22) к плотностям, имеем

$$p_{z(t)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{z(t)}(j\theta,t)e^{-j\theta z}d\theta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{pva(0)}\left(z',v_z,a_z\right)\times\right.$$
$$\left.\times e^{j\theta\left[z'+v_z t+a_z\cdot\left(t^2/2\right)\right]}dz'\,dv_z\,da_z\right]e^{-j\theta z}d\theta\,. \quad 3)$$

Изменение в (23) порядка интегрирования дает

$$p_{z(t)}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{pva(0)}(z',v_z,a_z)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\theta\left[z-z'-v_z t-a_z\frac{t^2}{2}\right]}d\theta\right]dz'\,dv_z\,da_z\,. \quad (24)$$

Имея в виду, что интеграл в квадратных скобках есть дельта-функция $\delta\left(z-z'-v_z t-a_z t^2/2\right)$, с учетом ее фильтрующего свойства при интегрировании по $z'$ получаем

$$p_{z(t)}(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{pva(0)}\left(z-v_z t-a_z\frac{t^2}{2},v_z,a_z\right)dv_z\,da_z\,. \quad (25)$$

Как следует из (25), текущая плотность распределения продольной координаты положения ансамбля в произвольный момент $t$ представляет собой результат усреднения плотности совместного распределения положения, скорости, ускорения в момент $t=0$ по второй и третьей переменным (скорости $v_z$ и ускорению $a_z$), тогда как ее первая переменная – координата $z$ – подвергнута предварительному смещению на величину, зависящую от $v_z$ и $a_z$ в соответствии с законом равноускоренного движения (15). Заметим, что (25) сохраняет справедливость и при $t=0$, вырождаясь в обычную формулу связи маргинального распределения с совместным.

## 5. Обсуждение и выводы

В статье выведены определяющие статистическую динамику ансамбля ускоренных частиц интегральные преобразования $T_v$ и $T_z$, задаваемые выражениями (11) и (22). Они существенно отличаются от преобразования Фурье, которое связывает характеристическую функцию и плотность распределения при отсутствии зависимости параметров движения от времени. Кинематические изменения с течением времени приводят к трансформации распределения ансамбля, сначала параметрической (с сохранением закона), а затем и непараметрической (с изменением закона). Как известно, зависимость параметров распределения сечений случайного процесса от времени является достаточным признаком его нестационарности. Аналогичным образом временную зависимость параметров текущего распределения ансамбля следует рассматривать как признак нестационарности его состояния. Кроме этого, перемещение ансамбля в пространстве порождает пространственную зависимость параметров распределений, что является признаком неоднородности среды, порожденной эволюцией ансамбля.

Таким образом, полученные в статье эволюционные уравнения позволяют развить в статистической динамике ансамблей частиц систематический подход к изучению эффектов ускорения, связанных с нестационарностью и неоднородностью состояния среды.

1. Прежде всего, нуждается в разработке методика оценки постоянной времени эволюции состояния ансамбля как интервала времени, на котором изменениями плотности можно пренебречь по аналогии с постоянной корреляции или когерентности [1] или постоянной забывания состояния [4]. Развитый в [16] подход к оценке интервала осреднения нестационарного случайного процесса по одной реализации можно использовать для определения оптимального интервала локальной стационарности состояния ансамбля.

2. Вызывает интерес устойчивость различных законов распределения к воздействию ускорения.

3. В частном, но весьма распространенном случае, когда при $t=0$ ансамбль (продольная координата положения и/или скорости) имеет нормальное распределение, его текущее распределение $p_s(y,t)$ при малых $t$ будет мало уклоняться от нормального, поэтому его предлагается раскладывать в усеченный ряд Грама – Шарлье [15]

$$p_s(y,t)=p_N(y,t)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{L}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{D_y^{n/2}}H_n\left(\frac{y-m_y}{D_y^{1/2}}\right), \quad (26)$$

где $p_N(y,t)$ – опорная нормальная плотность с математическим ожиданием $m_y$ и дисперсией $D_y$, $H_n(y)$ – многочлены Эрмита, а $b_n$ – квазимоменты

$$b_n=D_y^{n/2}\int_{-\infty}^{\infty}p_s(y,t)H_n\left(\frac{y-m_y}{D_y^{1/2}}\right)dy\,. \quad (27)$$

Обычно наилучшее приближение при заданном $L$ достигается при [15]

$$m_y=\int_{-\infty}^{\infty}y\,p_s(y,t)dy\,, \quad (28,а)$$

$$D_y=\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-m_y\right)^2p_s(y,t)dy\,. \quad (28,б)$$

Однако в условиях рассматриваемой в статье задачи такой выбор опорного распределения приводит к зависимости $m_y$, $D_y$ и $b_n$ от времени, что препятствует анализу явления.

Предлагается использовать (26) в качестве средства декомпозиции зависимости текущего распределения $p_s(y,t)$ от времени $t$ и аргумента $y$, то есть средства оценки фактического уклонения текущего распределения от начального. С этой целью в качестве опорного нормального распределения при $t > 0$ следует выбирать начальное распределение $p_s(y,0)$. Тогда зависимость текущего распределения от времени будет исчерпывающим образом опосредована квазимоментами $b_n = b_n(t)$ и

$$p_s(y,t) = p_s(y,0) \times \times \sum_{n=0}^{L} \frac{1}{n!} \frac{b_n(t)}{D_y^{n/2}} H_n\left(\frac{y-m_y}{D_y^{1/2}}\right). \qquad (29)$$

Поскольку многочлены Эрмита в пространстве $L_2[-\infty,\infty]$ образуют полную ортонормальную систему, выражение (29) представляет наглядный инструмент анализа эволюции состояния ансамбля ускоренных частиц в виде своеобразного спектрального разложения текущей плотности в спектр Эрмита.

4. Развитый в статье подход можно использовать для оценки времени и условий перехода ламинарного ускоренного движения в турбулентное.

5. Полученное описание свойств ансамбля целесообразно использовать при построении модели среды в задачах распространения, рассеяния и дифракции в нестационарных средах.

Всем этим вопросам планируется посвятить отдельные публикации.

## Список литературы


1. *Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. – М., Наука, 1978. – 470 с.*
2. *Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А. Исимару. – М., Мир, 1981. – Т.1. – 280 с. – Т. 2. – 322 с.*
3. *Применение ультразвука в медицине / Под ред. К. Хилла. – М., Мир, 1989. – 326 с.*
4. *Пригожин И. Неравновесная статистическая механика / И. Пригожин. – М., Мир, 1964. – 180 с.*
5. *Дубнищев Ю.Н. Методы лазерной доплеровской анемометрии / Ю.Н. Дубнищев, Б.С. Ринкевичюс. – М.: Наука, 1982. – 224 с.*
6. *Устинов Н.Д. Методы обработки оптических полей в лазерной локации / Н.Д. Устинов, И.Н. Матвеев, В.В. Протопопов . – М.: Наука, 1983. – 320 с.*
7. *Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф – М.: Наука, 1970. – 380 с.*
8. *Censor D. Generalized Doppler effect: coherent and incoherent spectra / D. Censor, V.L.Newhouse // J. Acoust. Sec. Am. 83(6), June, 1988. – P. 122 – 128.*
9. *Bonch-Osmolovsky A.G. Physics of new methods of charged particle acceleration: collective effects in dense charged particle ensembles / A.G. Bonch-Osmolovsky. – World Scientific, 1994. – 188 p.*
10. *Separation of particles in time-dependent focusing billiards / A. Loskutov et al. // Physica A (2010). – Vol. 389. – P. 5408 – 5415.*
11. *Recent Advances in Understanding Particle Acceleration Processes in Solar Flares / V.V. Zharkova et al. // Space Sci. Rev. (2011). – Vol. 159. – P. 357– 420.*
12. *Acceleration statistics of finite-sized particles in turbulent flow: the role of Faxen forces / E. Calzavarini et al. // J. Fluid Mech. (2009). – Vol. 630. – P. 179 – 189.*
13. *Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика / В.Л. Гинзбург. – М.: Наука, 1975. – 520 с.*
14. *Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 326 с.*
15. *Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 422 с.*
16. *Юшин В.И. Оптимальные интервалы осреднения при измерении статистических характеристик нестационарного процесса по одной реализации / В.И. Юдин // Автометрия. – 1966. – Т. 9, № 3. – С. 113 – 121.*


*Поступила в редколлегию 5.07.2012*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С.М. Порошин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

### СТАТИСТИЧНА ДИНАМІКА АНСАМБЛЮ ПРИСКОРЕНИХ ЧАСТОК

А.В. Статкус

*Статистична динаміка ансамблю прискорених часток досліджується у сенсі еволюції стану ансамбля, що обумовлена прискоренням, для випадку рівномірно прискореного колінеарного руху часток вздовж осі циліндра. Еволюційні рівняння для поточної характеристичної функції одержані у формі лінійного інтегрального перетворення щільності розподілу ансамбля в начальний момент часу.*

***Ключові слова:*** *ансамбль часток, прискорення, еволюція стану, нестаціонарність.*

### STATISTICAL DYNAMICS OF ACCELERATED PARTICLE ENSEMBLE

A.V. Statkus

*Statistical dynamics of accelerated particle ensemble (APE) is studied in terms of the ensemble state evolution in the case of particle collinear uniformly accelerated movement along the axe of cylinder. Evolution equations for current characteristic function are derived in the form of linear integral transform of APE probability density function at initial moment of time.*

***Key words:*** *particle ensemble, acceleration, state evolution, nonstationarity.*