УДК 623. 021: 005

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ И СРЕДСТВ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил проф., д.т.н. Б.Ф.Самойленко)

В статье описывается метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих распределение сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации.

Рассмотрим конфликтную ситуацию между сторонами **B** и **A**, описываемую математической моделью распределения разнородных сил и средств [1]:

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n_1} \partial_{1j} b_{1j} y_j(t) - \sum\limits_{j=n_1}^{n} \beta_{1j} b_{1,n1+j} y_{n1+j}(t) + u_1(t); \\
\dfrac{dx_2(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n_1} \partial_{2j} b2 y_j(t) - \sum\limits_{j=n_1}^{n} \beta_{2j} b_{2,n1+j} y_{n1+j}(t) + u_2(t); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dx_{m_1}(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n_1} \partial_{m_1 j} b_{m_1 j} y_j(t) - \sum\limits_{j=n_1}^{n} \beta_{m_1 j} b_{m_1,n_1+j} y_{n_1+j}(t) + u_{m_1}(t); \\
\dfrac{dx_{m_1+1}(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n_1} \partial_{m_1+1,j} b_{m_1+1,j} y_j(t) - \sum\limits_{j=n_1}^{n} \beta_{m_1+1,j} b_{m_{1+1},n_{1+j}} y_{n_1+j}(t) + u_{m_1+1}(t) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dx_m(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n_1} \partial_{mj} b_{mj} y_j(t) - \sum\limits_{j=n_1}^{n} \beta_{mj} b_{m,n_1+j} y_{n_1+j}(t) + u_m(t); \\
\dfrac{dy_1(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m_1} \gamma_{1i} a_{1i} x_i(t) - \sum\limits_{i=m_1}^{m} \alpha_{1i} a_{1,m1+i} x_{m1+i}(t) + v_1(t); \\
\dfrac{dy_2(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m_1} \gamma_{2i} a_{2i} x_i(t) - \sum\limits_{i=m_1}^{m} \alpha_{2i} a_{2,m1+i} x_{m1+i}(t) + v_2(t); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dy_{n1}(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m_1} \gamma_{n1i} a_{n_1 i} x_i(t) - \sum\limits_{i=m_1}^{m} \alpha_{n1i} a_{n1,m1+i} x_{m1+i}(t) + v_{n1}(t); \\
\dfrac{dy_{n_1+1}(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m_1} \gamma_{n1+1,i} a_{n_{1+1},i} x_i(t) - \sum\limits_{i=m_1}^{m} \alpha_{n1+1,i} a_{n1+1,m1+i} x_{m1+i}(t) + v_{n1+1}(t); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dy_n(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m_1} \gamma_{ni} a_{n_i} x_i(t) - \sum\limits_{i=m_1}^{m} \alpha_{ni} a_{n,m1+i} x_{m1+i}(t) + v_n(t)
\end{cases} \qquad (1)$$

при начальных условиях:

$$x_i(0)=x_i^0\left(i=\overline{1,m}\right);\quad y_j(0)=y_j^0\ \left(j=\overline{1,n}\right).\tag{2}$$

где **x(t)** и **y(t)** – математические ожидания количества средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени **t**; α_{ji}, β_{ij} – средние скорострельности (число выстрелов в единицу времени) сторон **A** и **B**; a_{ji} – эффективная скорострельность средств **i** - го типа группировки **A** по средствам **j** - го типа группировки **B**; b_{ji} - эффективная скорострельность средств **j** – го типа стороны **B** по средствам **i** - го типа стороны **A**; $u_i(t)$ – интенсивность поступления средств **i** - го типа стороны **A**; $v_j(t)$ **–** интенсивность поступления средств **j** - го типа стороны **B**; ∂_{ij} – доля средств **j** - го типа стороны **B**, распределяемая против средств **i** - го типа стороны **A**; γ_{ji} – доля средств **i** - го типа стороны **A**, распределяемая против средств **j** - го типа стороны **B**.

В уравнениях (1) величины ∂_{ij}, β_{ij}, γ_{ji}, α_{ji} и функции $u_i(t)$, $v_j(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\partial_{ij}=1,\ j=\overline{1,n_1};\ \partial_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n_1};\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\beta_{ij}=1,\ j=\overline{1,n};\ \beta_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n_1};\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{ji}=1,\ i=\overline{1,m_1};\ \gamma_{ji}\ge 0,\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m_1};\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ji}=1,\ i=\overline{1,m};\ \alpha_{ji}\ge 0,\ j=\overline{1,n_1},\ i=\overline{1,m};\\ 0\le u_i(t)\le a_i,\ i=\overline{1,m};\\ 0\le v_j(t)\le b_i,\ j=\overline{1,n};\\ \int\limits_0^T u_i(t)dt\le A_i,\ i=\overline{1,m};\\ \int\limits_0^T v_j(t)dt\le B_j,\ j=\overline{1,n}.\end{cases}\tag{3}$$

Запишем систему уравнений (1) в матричном виде

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt}=Gx(t)\tag{4}$$

с начальными данными:

$$\bar{x}(0)=\left[x_1(0);\ x_2(0);\ \ldots;x_m(0)\right]^T,\tag{5}$$

где

$$G=\begin{bmatrix} 0 & -\bar{B} \\ -\bar{A} & 0 \end{bmatrix};\ \bar{B}=\left\|\partial_{ij}\beta_{ij}q_{ij}\right\|_{m,n};\ \bar{A}=\left\|\gamma_{ji}\alpha_{ji}p_{ji}\right\|_{n,m};\ \bar{x}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Решение полученной системы уравнений выполним численными методами. Выпишем формулы Рунге-Кутта четвёртого порядка для системы уравнений (1):

$$\begin{gathered} x^{(l+1)}=x^{(l)}+\frac{h}{6}\left(k_1^{(l)}+2k_2^{(l)}+2k_3^{(l)}+k_4^{(l)}\right), l=\overline{0,l_0}; \\ k_1^{(l)}=Gx^{(l)}; \\ k_2^{(l)}=G\left(x^{(l)}+\frac{h}{2}k_1^{(l)}\right); \\ k_3^{(l)}=G\left(x^{(l)}+\frac{h}{2}k_2^{(l)}\right); \\ k_4^{(l)}=G\left(x^{(l)}+hk_3^{(l)}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Выразим $k_i^{(l)}\left(i=\overline{1,4}\right)$ через $x^{(l)}$:

$$\begin{aligned} &k_1^{(l)}=Gx^{(l)}; \\ &k_2^{(l)}=G\left[x^{(l)}+\frac{h}{2}k^l\right]=\left(G+\frac{h}{2}G^2\right)x^l; \\ &k_3^{(l)}=G\left[x^{(l)}+\frac{h}{2}\left(G+\frac{h}{2}G^2\right)x^l\right]=\left(G+\frac{h}{2}G^2+\frac{h^2}{4}G^3\right)x^l; \\ &k_4^{(l)}=G\left[x^{(l)}+h\left(G+\frac{h}{2}G^2+\frac{h^2}{4}G^3\right)x^l\right]=\left(G+hG^2+\frac{h}{2}G^3+\frac{h^3}{4}G^4\right)x^l \end{aligned} \tag{8}$$

и подставим в выражение для $x^{(l+1)}$. В результате получим, что

$$\begin{gathered} x^{(l+1)}=x^{(l)}+\frac{h}{6}G+\left[2\left(G+\frac{h}{2}G^2\right)+\right. \\ \left.+2\left(G+\frac{h}{2}G^2+\frac{h^2}{4}G^3\right)+\left(G+hG^2+\frac{h}{2}G^3+\frac{h^3}{4}G^4\right)\right]x^{(l)}. \end{gathered} \tag{9}$$

После преобразований окончательное выражение для расчётной формулы представим в виде

$$x^{(l+1)}=\left(I+hG+\frac{h^2}{2!}G^2+\frac{h^3}{3!}G^3+\frac{h^4}{4!}G^4\right)x^{(l)}. \tag{10}$$

Предлагается следующая методика решения рассматриваемой задачи. Вначале выполняются предварительные вычисления матриц: $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^2$, $\mathbf{G}^3$, $\mathbf{G}^4$.Затем по формуле (10) определяются величины $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$, … $\mathbf{x}^{(l)}$, … причём на каждом шаге алгоритма при переходе от узла $\mathbf{t_1}$ к узлу $\mathbf{t_1 + 1}$ вычисления приводятся с шагом $\mathbf{h}$ и шагом $\mathbf{h/2}$. По полученным значениям $\mathbf{x_h^{(l+1)}}$ и $\mathbf{x_{h/2}^{(l+1)}}$ определяется погрешность формулы по правилу Рунге:

$$\delta = \frac{\left\| \mathbf{x_h^{(l+1)}} - \mathbf{x_{h/2}^{(l+1)}} \right\|}{\mathbf{15}}, \tag{11}$$

где $\left\| \mathbf{x^l} \right\| = \max\limits_{1 \le i \le 14} \left| \mathbf{x_i^{(l)}} \right|$.

Если величина δ больше приемлемого значения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.01}$ - погрешность формулы, то шаг уменьшается вдвое: $\mathbf{h := h/2}$ и процедура повторяется.

Если величина δ значительно меньше приемлемого значения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.01}$, то шаг увеличивается вдвое: $\mathbf{h: = 2h}$ и процедура повторяется.

Если величина δ меньше приемлемого значения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.01}$ - погрешность формулы, но незначительно, то происходит переход к узлу $\mathbf{t_1 + 2}$ с тем же шагом.

Рассмотренный метод решения задачи даёт возможность алгоритмизировать процесс моделирования конфликтных операций конфликтующих сторон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХФВ «Транспорт України» – 2001. – Вип. 1(11). – С. 129 - 133.*
2. *Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.*
3. *Основы теории управления войсками / Под ред. П.К. Алтухова - М.: Воениздат, 1984. – 297 с.*
4. *Давыдов Э.Г. Исследование операций: - М.: Высш. шк., 1990. – 459 с.*
5. *Мороз Ф.В., Кембелл Д.Е. Методы исследования операций. – М.: Сов. радио, 1965. – 286 с.*

Поступила 31.01.2002

КОНОНОВ Владимир Борисович *– канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*