

# Інформаційні технології в економіці, екології, медицині й освіті

УДК 519.81

Н.О. Бринза, В.А. Затхей, О.В. Вільхівська

Харківський національний економічний університет імені С. Кузнеця, Харків

## ПІДХОДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНТЕРВАЛЬНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

*У статті розглянута проблема вирішення задач оптимального розподілу ресурсів в умовах нечіткої інтервальної невизначеності, подано можливість використання методів прийняття багатокритеріальних рішень в умовах невизначеності для вирішення прикладних задач розподільного типу, виділено класи розподільних задач. Розглянуто методи вирішення інвестиційних задач в умовах невизначеності.*

**Ключові слова:** прийняття рішень, нечіткі множини, оптимізація, багатокритеріальність, виробнича функція, теорія корисності, розподіл ресурсів, модель Марковіца, оптимальність, VaR технологія.

### Вступ

Однією з найбільш важливих проблем, що виникають в різних галузях людської діяльності, є проблема вдосконалення управління. У багатьох випадках ефективно управління полягає в оптимальному використанні ресурсів. Природа ресурсів може бути різною, це можуть бути матеріальні, енергетичні, трудові, часові і т.д. ресурси.

Екстремальні задачі розподілу ресурсів виникають у зв'язку з тим, що обсяги ресурсів є обмеженими, і це призводить до конфліктних ситуацій. Складність складання розкладів визначається ще й тим, що необхідно не тільки забезпечити необхідні умови проведення всієї безлічі операцій, але і погодити їх у часі.

Особливість задач розподілу ресурсів полягає в тому, що в багатьох випадках їх доводиться вирішувати в умовах неповноти вхідної інформації та багатокритеріальності цільових функцій. Неврахування цих особливостей призводить до некоректних рішень, які не мають практичної цінності.

**Мета статті** – показати можливість використання методів прийняття багатокритеріальних рішень в умовах невизначеності для вирішення прикладних задач розподільного типу.

### Загальна характеристика класу задач

Задача, в якій вимагається щонайкраще, в сенсі обраного критерію оптимальності, розподілити обмежені ресурси по декільком споживачам, називається задачею розподільного типу [1].

Розподіл ресурсів по різних видах діяльності має забезпечувати максимізацію ефекту від реалізації результатів виробництва (операції) в умовах наявності обмежень на обсяги ресурсів та інтенсивність виробництва.

Крім того, можуть накладатися обмеження на питомий об'єм ресурсів, що витрачаються на реалізацію одиниці кожного виду діяльності. Задача розподілу ресурсів є найпоширенішим класом завдань управління. Вони характеризуються наступною загальною постановкою. Є обмежена кількість ресурсів на виконання операції. Ці ресурси можуть бути використані при різному розподілі їх по об'єктах (або видами діяльності). Необхідно відшукати такий розподіл ресурсів, щоб була досягнута найбільша ефективність від їх застосування [2 – 4].

Розподіл ресурсів за різними видами діяльності має забезпечувати максимізацію ефекту від реалізації результатів виробництва в умовах наявності обмежень на обсяги ресурсів та інтенсивність виробництва. Крім того, можуть накладатися обмеження на питомий об'єм ресурсів, що витрачаються на реалізацію одиниці кожного виду діяльності. Задача розподілу ресурсів є найпоширенішим класом задач управління. Вони характеризуються наступною загальною постановкою. Є обмежена кількість ресурсів на виконання операції. Ці ресурси можуть бути використані при різному розподілі їх за об'єктами (або видами діяльності). Необхідно знайти такий розподіл ресурсів, при якому буде досягнута найбільша ефективність від їх застосування.

Отримавши ресурс  $r_i$ ,  $i$ -й споживач виробляє деякий ефект  $E_i$ :

$$E_i = F_i(r_i), \quad (1)$$

при цьому оператор  $F_i$  називають виробничою функцією,  $(r_i)$  – вхід,  $(E_i)$  – вихід. В цілому система отримує сумарний ефект  $E_{\Sigma}$ , який прагне максимізувати

$$E_{\Sigma} = \max_{r_i \in R} Q[F_i(r_i)] \quad (2)$$

при обмеженні

$$\sum r_i \leq R, \quad (3)$$

де  $R$  – загальна якість ресурсу, який розподіляють.

У загальному випадку, ефекти  $E$ , що генеруються як підсистемами (споживачами ресурсів), так і системою в цілому, є набором різнорідних ефектів  $j$ -го виду, тобто

$$E_i = \langle E_{ij} \rangle, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Наприклад, будь-яка виробнича система виробляє економічний, соціальний та екологічний ефект. Таким чином, задача (2) є багатокритеріальною. Надалі будемо вважати, що існує деяка скалярна узагальнена (багатофакторна) оцінка ефекту як на рівні споживачів ресурсів, так і системи в цілому.

Ще одна особливість полягає в тому, що розподільчі задачі в більшості випадків доводиться вирішувати в умовах інтервальної невизначеності.

Основними джерелами невизначеності є:

неповнота знань щодо виду та параметрах виробничих функцій  $F_i$  і  $Q$ ;

невизначеності виникають при формулюванні скалярних багатофакторних оцінок [5] ефекту;

неточності встановлення системи обмежень.

Приклади прикладних задач розподілу ресурсів: задача про оптимальні об'єми інвестиційних ресурсів, змінно-добове планування виробничого складу; розподіл обмеженої кількості частот в радіомережах та ін.

Існують наступні класи розподільчих задач:

з однорідними і різнорідними ресурсами;

з залежними і незалежними об'єктами розподілу (споживачами);

з одноетапним і багатоетапним розподілом;

прямі та зворотні тощо.

У інструментарій управління задач розподілу ресурсів повинні входити методи ефективного вирішення задач, проблемно-орієнтованих на особливості об'єкта управління. Необхідно розробити єдиний математичний опис і методи вирішення широкого класу задач розподілу ресурсів, зокрема, з урахуванням нелінійності виробничих функцій елементів системи, різного виду невизначеностей, багатокритеріальності, різного ступеня централізації системи.

Спільними особливостями задач розподілу ресурсів є наявність в них цільової функції (критерію оптимальності) (2), а також обмежень на обсяг ресурсів (3) і на значення змінних, що оптимізуються. Варіант розподілу ресурсів, що задовольняє обмеженням, визначає план. Процес пошуку серед множини припустимих такого плану, який забезпечує максимум (мінімум) цільової функції, називається оптимізацією плану. План, при якому досягається екстремум цільової функції, називається оптималь-

ним. Вирішення розподільчих задач може бути виконано на основі графічних або математичних методів.

Для вирішення задач розподілу ресурсів відомі аналітичні методи математичного програмування, засновані на дослідженні похідних цільової функції, нерідко виявляються непридатними через наявність сильних обмежень на змінні та область зміни цільової функції. Метод повного перебору всіх можливих варіантів вирішення задач розподілу ресурсів також знаходить обмежене застосування через велику розмірність практично важливих задач [6].

Значною мірою здолати зазначені труднощі дозволяють методи чисельного математичного програмування. Чисельне математичне програмування – область прикладної математики, що розробляє теорію та методи чисельного вирішення багатопараметричних математичних оптимізаційних задач. Розрізняють методи лінійного та нелінійного програмування, методи динамічного, стохастичного і цілочисельного програмування. Для вирішення розподільчих задач може також застосовуватися цілий комплекс наближених методів [7, 8].

### Основні підходи до вирішення задачі оптимального розподілу ресурсів

Сучасний підхід до вирішення задач оптимального розподілу ресурсів в умовах невизначеності в загальному випадку ґрунтується на двокритеріальному розгляді задач, коли одним із критеріїв є рівень сумарної ефективності використання ресурсів у всій сукупності об'єктів, між якими розподіляються ресурси, а другим критерієм – міра невизначеності (ризик) ефективного використання ресурсів. При цьому перший критерій підлягає максимізації, а другий – мінімізації. Вперше таку математичну двокритеріальну модель задачі оптимального розподілу ресурсів запропонував Гаррі Марковіц [9], який за цикл робіт з портфельного інвестування отримав в 1990 р Нобелівську премію. В рамках моделі Марковіца як критерій рівня сумарної ефективності використання ресурсів (в інтерпретації Марковіца роль ресурсу грає капітал) береться математичне сподівання сумарної ефективності як випадкової величини, а в якості критерію міри невизначеності – дисперсія сумарної ефективності. Такий вибір математичного виразу міри невизначеності дозволив реалізувати в рамках моделі Марковіца розподіл ресурсів по декількох об'єктах (диверсифікація ресурсів), що при виконанні деяких умов повинно приводити до зменшення ризику. Математична модель Марковіца задачі оптимального розподілу ресурсів в умовах невизначеності належить до класу задач квадратичного програмування. Клас задач оптимізації, відомий під назвою завдань квадратичного програмування, був сформульований, та була розвинена теорія рішень такого класу задач в основному під впливом моделі Марковіца.

Класична постановка задачі Марковіца формування оптимальних інвестиційних портфельів є двох-критеріальною, один з критеріїв якої – середнє очікуване значення ефективності, а другий – мінливість ефективності [9, 10].

В останні роки інтенсивно розвивається більш загальний підхід до вирішення завдань оптимального розподілу ресурсів в умовах статистичної невизначеності, заснований на розрахунку ймовірності  $p^*$  події, що складається в тому, що сумарна ефективність використання ресурсів сприймається як випадкова величина, прийме значення менше, ніж заданий рівень  $R^*$ .

Підхід, заснований на розгляді задач оптимального розподілу ресурсів, отримав назву VaR-підходу (Value-at-Risk). При постановці завдань оптимального розподілу ресурсів, заснованого на VaR-підході, критерієм рівня сумарної ефективності є  $R^*$ , а критерієм невизначеності (ризик) ймовірність  $p^*$ . Концепція VaR відповідає розумінню ризику традиційно використовуюваного в технічних областях, де величина ризику зазвичай вимірюється величиною ймовірності настання несприятливої ситуації (ймовірність катастрофи, ймовірність аварії, ймовірність виходу з ладу апаратури) або просто несприятливого поєднання значень випадкових змінних [11 – 14].

Слід підкреслити, що VaR підхід орієнтований на аналіз і прийняття рішень в умовах ймовірнісної невизначеності. Подальший розвиток теорії прийняття рішень в умовах невизначеності потребує узагальнення VaR підходу на випадок нечіткої (заданої у вигляді нечітких множин) і інтервальної (заданої інтервальними значеннями) невизначеностей.

Можливі ситуації, коли невідомі ні інформація про характер розподілу можливих значень усередині інтервалу, ні межі інтервалу. Інформація може здаватися вербальними висловлюваннями типу «близько 5», «в інтервалі від 2 до 6», «близько до 5» і т.д. Формалізація таких нечітких висловлювань носить евристичний характер і заснована на знаннях експерта, його досвіді у вирішенні подібних завдань. Формалізація заснована на теорії нечітких множин [15].

За необхідністю, об'єктивна ймовірнісна невизначеність може бути інтерпретована як нечітке число відповідне лінгвістичної змінної "лежить в інтервалі від  $x_1$  до  $x_2$ " з функцією приналежності [16]:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ 1, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

В усіх випадках інтервальної невизначеності оцінка ефективності рішення є інтервальним, тобто обмеженим зліва і справа, значенням. Задача в цьому випадку полягає у виборі конкретного точкового рішення на інтервалі рішень.

Будь-якому точковому рішення відповідає деяке очікуване значення ефекту (Value), яке визначається конкретними точковими значеннями змінних. Змінні є інтервальними, тобто можуть приймати будь-які значення на інтервалі. Відхилення змінних від прийнятих точкових значень призводить до втрат (Loss). При цьому втрати можуть бути двох видів:

негативними ( $L_N$ ) – зменшення ефективності в порівнянні з розрахунковим рівнем за рахунок несприятливого поєднання значень параметрів інтервальних значень (аналог традиційного ймовірнісного ризику  $R$ );

позитивними ( $L_p$ ) – це недоотриманий ефект, який потенційно можна було б отримати, у зв'язку з тим, що параметри прийняли значення більш сприятливі в порівнянні з розрахунковими.

Технологію прийняття рішень з урахуванням зазначених можливих втрат позначимо VaL (Value-at-Loss) та назвемо VaL технологією. Згідно VaL технології очікуваний ефект  $V$  необхідно максимізувати, а втрати обох видів  $L_N$ ,  $L_p$  – мінімізувати. При цьому сума  $L_N$  і  $L_p$  є постійною величиною.

Таким чином

$$V(x) \rightarrow \max_{x \in X}; \quad L_N(x) \rightarrow \min_{x \in X}; \quad L_p(x) \rightarrow \min_{x \in X}; \quad (5)$$

$$L_N(x) + L_p(x) = \text{const}; \quad a \leq x \leq b,$$

де  $a, b$  – відповідно ліва і права межі інтервалу можливих значень змінних  $x$ .

Вочевидь, що позитивні ( $L_p$ ) і негативні ( $L_N$ ) втрати мають для користувача (ОПР) різну цінність:  $L_N$  – це прямі втрати ефекту (фінансів, часу виконання роботи, матеріальних ресурсів тощо), тоді як ( $L_p$ ) – це недоотриманий потенційно можливий ефект. Тоді з урахуванням того, що

$$L_N(x) + L_p(x) = \text{const} \quad (6)$$

можна записати, що рішення визначається за трьома критеріями, при цьому враховується очікуваний ефект, позитивні та негативні втрати

$$x^\circ = \arg \max_{x \in X} [V(x) - \alpha L_p(x) - (1 - \alpha)L_N(x)], \quad (7)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad (8)$$

Тоді якщо  $\alpha = 0$ , реалізується стратегія крайнього песимізму, при  $\alpha = 1$  – стратегія крайнього оптимізму, при  $\alpha = 0.5$  – мінімаксна стратегія.

Для обчислення  $L_N$  і  $L_p$  будемо вважати, що відома залежність, що характеризує розподіл на інтервалі можливих значень змінних  $x \in [a, b]$ :

$$V = F(x), \quad x \in [a, b]. \quad (9)$$

Тоді при  $x = a$ :

$$L_p(x) = 0; \quad L_N = \int_a^b F(x) dx. \quad (10)$$

При  $x = b$ :

$$L_N(x) = 0; \quad L_P = \int_a^b F(x) dx. \quad (11)$$

При  $x = c$ ,  $a \leq c \leq b$ :

$$L_P = \int_a^c F(x) dx; \quad L_N = \int_c^b F(x) dx. \quad (12)$$

Потреба розвитку і використання VaL-технології для вирішення практичних завдань розподілу ресурсів в умовах невизначеності вимагає розробки ефективних обчислювальних алгоритмів та реалізації їх в комп'ютерних програмах для вирішення задач оптимального розподілу ресурсів в умовах невизначеності. Більше того, сучасний підхід постановки і вирішення задач оптимального розподілу ресурсів вимагає ефективного використання всієї доступної інформації про використання ресурсів в тих об'єктах, в які розподіляються ресурси.

## Висновок

У роботі розглянуто методи вирішення інвестиційних задач в умовах невизначеності і показано, що існуючі підходи орієнтовані на врахування статистичної невизначеності (VaR технології) і не враховують інших видів (нечіткою, інтервальної) невизначеності. Розроблено модель обліку багатокритеріальності ефектів підсистем шляхом формування скалярної узагальненої оцінки.

Узагальнююча модель прийняття рішень в умовах невизначеності загального вигляду (VaL технологія), відмінна тим, що задача вибору точкового рішення з інтервалу можливих рішень розглянута як багатокритеріальна, що враховує ефективність рішення та можливі «позитивні» й «негативні» втрати.

## Список літератури

1. Автоматизированные системы управления городским хозяйством / И.В. Кузьмин, Э.Г. Петров, И.А. Алферов, В.В. Евсеев, Л.В. Мигунова. – К.: Будівельник, 1978. – 144 с.

2. Томас Ричард. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / Р. Томас. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 1999. – 432 с.

3. Таха Х.А. Введение в исследование операций. 7-е изд. / Х.А. Таха. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.

4. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путкоу др.; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 407 с.

5. Петров Э.Г. Методы и модели принятия решений в условиях многокритериальности и неопределенности / Э.Г. Петров, Н.А. Брынза, Л.В. Колесник, О.А. Пискалова. – Херсон: Гринь Д.С., 2014. – 192 с.

6. Петров Э.Г. Метод решения задачи распределения инвестиций в условиях многокритериальности с учетом интервальных неопределенностей исходных данных / Э.Г. Петров, Н.А. Брынза // Экономика развития. – 2014. – № 1(69). – С. 128-135.

7. Крянев А.В. Основы финансового анализа и портфельного инвестирования в рыночной экономике / А.В. Крянев. – М.: МИФИ, 2001.

8. Зайченко Ю.П. Исследование операций: нечеткая оптимизация: учеб. пособие / Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1991. – 191 с.

9. Markovitz H. Portfolio Selection / H. Markovitz // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – № 1. – P. 77-91.

10. Шарп У.Ф. Инвестиции / У.Ф. Шарп, Г.Дж. Александер, Д.В. Бэйли. – М.: Инфра-М, 2001. – 1028 с.

11. Due D. An Overview of Value-at-Risk / D. Due, J. Pan // Journal of Derivatives. – 1997. – Vol. 4. – P. 7-49.

12. Kast R. VaR and Optimization / R. Kast, E. Luciano, L. Peccati // 2nd International Workshop on Preferences and Decisions, Trento, July 1-3 1998.

13. Beder, Tanya Styblo. VAR: Seductive but Dangerous / Beder, Tanya Styblo // Financial Analysts Journal. – 1995. – Vol. 51, № 5. – P. 12-24.

14. Mina J. Return to RiskMetrics: The evolution of a standard / J. Mina, J. Xiao. – RiskMetrics Group, New York, 2001. – 111 p.

15. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: «Мир», 1976.

16. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

Надійшла до редколегії 2.02.2016

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. І.В. Гребенник, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

## ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Н.А. Брынза, В.А. Затхей, О.В. Вильхивская

В статье рассмотрена проблема решения задач оптимального распределения ресурсов в условиях нечеткой интервальной неопределенности; показана возможность использования методов принятия многокритериальных решений в условиях неопределенности для решения прикладных задач распределительного типа; выделены классы распределительных задач. Рассмотрены методы решения инвестиционных задач в условиях неопределенности.

**Ключевые слова:** принятие решений, нечеткие множества, оптимизация, многокритериальность, производственная функция, теория полезности, распределение ресурсов, модель Марковица, оптимальность, VaR технология.

## APPROACH TO THE PROBLEM OF OPTIMAL ALLOCATION OF RESOURCES IN A FUZZY INTERVAL OF UNCERTAINTY

N.O. Brynza, V.A. Zathej, O.V. Vylhyvska

The article considered the problem solving optimal allocation of resources in terms of fuzzy interval uncertainty. The possibility of using the methods of multi-criteria decision-making under uncertainty for applications such as distribution; allocated classes distributor-governmental tasks. The methods of solution of problems of investment under uncertainty.

**Keywords:** decision making, fuzzy sets, optimization, multicriteria, production function, utility theory, resource allocation, Markowitz model, optimality, VaR technology.