УДК 001.891.572; 004.02

О.С. Бичков

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

ЗАСТОСУВАННЯ МІР МОЖЛИВОСТІ ТА НЕОБХІДНОСТІ ДЛЯ ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ОПИСУ НЕЧІТКИХ ПРОЦЕСІВ І ПОДІЙ

В цій роботі за мету ставиться задача побудови узагальненої моделі теорії можливості із використанням крім міри можливості, ще й міру необхідності та математичне обґрунтування такої моделі простору можливостей. Побудова теорії чітко слідує схемі теорії ймовірностей, що дозволяє прослідкувати формальні аналогії та відмінності понять та методів теорії ймовірності та теорії можливостей. Обґрунтовано необхідність введення нової моделі теорії можливостей. Наводяться нові означення. Доводяться фундаментальні леми та теореми. Результати роботи можна застосовувати при моделюванні процесів і поведінки об'єктів, коли неможливо проводити серію експериментів.

Ключові слова: *модель простору, міра необхідностей, міра можливостей, продовження мір.*

Вступ

Постановка проблеми. Теоретико-ймовірнісні методи [1] широко й успішно застосовуються в наукових дослідженнях для моделювання, в термінах випадковості, багатьох аспектів невизначеності та нечіткості, що відображають неповноту знань, або їх недостовірність. Але теоретико-ймовірнісні методи виявились неефективними при моделюванні широкого класу процесів та явищ, в яких вирішальну роль відіграють саме невизначеність та нечіткість. Мова йде про моделювання складних фізичних, соціальних та економічних систем, суб'єктивних суджень для моделювання та дослідження яких не можна проводити статистичні випробування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Широко відомі суб'єктивна ймовірність Севіджа, як міра невпевненості суб'єкта, судження якого задовольняють певних умовам раціональності; верхні та нижні ймовірності Демпстера, що характеризують неповноту спостережень і відображають невизначеність в теорії ймовірностей, яка моделюється багатозначними відображеннями; і нарешті, можливість Заде, що базується на його теорії нечітких множин. Це далеко неповний перелік робіт, орієнтованих на моделювання нечіткості та невизначеності не ймовірнісними методами.

Вперше поняття можливості було введено математиком Сугено М. в 1974 році. Потім це поняття вдосконалювалось в роботах Дюбуа Д., Прада А. [2] та отримало логічне завершення в роботах Питьєва Ю.А. [3]. Питаннями побудови моделі теорії можливостей займалися автори [4] та ін. [5–7]. Загальноприйнятим та достатнім вважається використання міри можливостей для опису простору можливостей, а міра необхідностей вводиться лише як допоміжна для опису подій [8–18].

В цій статті побудова теорії чітко слідує схемі теорії ймовірностей, що дозволяє прослідкувати формальні аналогії та відмінності понять та методів теорії ймовірності та теорії можливостей. Але найбільш суттєвою відмінністю теорій є те, що трактування фізичного змісту події, що описується в термінах можливостей, суттєво відрізняється від частотної інтерпретації в термінах ймовірностей. Це дозволяє моделювати та досліджувати набагато ширший клас задач, ніж можна було б зробити за допомогою методів теорії ймовірностей.

Актуальність. Відомо [1], що в теорії ймовірностей можливо охарактеризувати подію та протилежну їй подію за допомогою лише однієї міри – ймовірнісної. Це випливає із співвідношення $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. В теорії можливостей для взаємопротилежних подій в загальному випадку виконується нерівність $P(A) + P(\overline{A}) \geq 1$.

Досліджуючи проблематику пов'язану з моделюванням суб'єктивності виявилось, що самої можливості недостатньо для повного та адекватного опису експерименту. Тому було запропоновано розширити простір можливостей шляхом введення іншої характеристики події – необхідності. Це дозволило нам більш коректно структуризувати наші знання про досліджувані явища.

Тому для адекватної побудови моделі експерименту необхідно застосовувати обидві міри – міру необхідностей та можливостей.

Мета статті. В цій роботі за мету ставиться задача побудови узагальненої моделі теорії можливості із використанням крім міри можливості, ще й міру необхідності та математичне обґрунтування такої моделі простору можливостей.

Виклад основного матеріалу

Означення 1. [3] Суб'єктивною шкалою $L = ([0,1], \leq, +, \circ)$ будемо називати відрізок [0, 1] з впорядкованістю, яка визначається класичною нерівністю $\leq$, операцією суми "+" та операцією добутку "$\circ$".

Означення 2. [2–3] Сумою двох елементів a і b з L будемо називати функцію максимуму цих елементів, тобто $a+b\overset{\Delta}{=}\max(a,b)$.

Означення 3. [2–3] Добутком двох елементів a і b з L будемо називати функцію мінімуму цих елементів, тобто $a\circ b\overset{\Delta}{=}\min(a,b)$.

Природно у випадку зліченних суми та добутку розглядати операції max та min як точна верхню та нижню грані відповідно.

Легко впевнитися, що введені таким чином операції задовольняють всім класичним властивостям, а саме вони є комутативними, асоціативними та взаємно дистрибутивними:

1. $a+b=b+a$, $a\circ b=b\circ a$;
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$;
3. $a\circ(b+c)=\min(a,\max(b,c))=$ $=\max(\min(a,b),\min(a,c))=(a\circ b)+(a\circ c)$;
4. $a+(b\circ c)=\max(a,\min(b,c))=$. $=\min(\max(a,b),\max(a,c))=(a+b)\circ(a+c)$

Визначимо нейтральні елементи $\tilde{0}$ та $\tilde{1}$, поклавши $\tilde{0}\overset{\Delta}{=}0$ та $\tilde{1}\overset{\Delta}{=}1$. При цьому:

$0\circ a=\min(0,a)=0=\tilde{0}$, $1\circ a=\min(1,a)=a$,

$\tilde{0}+a=\max(0,a)=a$, $\tilde{1}+a=\max(a,1)=\tilde{1}$, де $a\in[0,1]$.

Впорядкованість на L узгоджена з операціями додавання та множення:

$$a\le b\Rightarrow\begin{cases}a\circ b\le b\circ c,\\ a+c\le b+c,\end{cases}\quad a,b,c\in L;\ \tilde{0}<\tilde{1}.$$

Означення 4. [3] Послідовність $\{a_n\}\subset L$ називається збіжною, якщо $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n\overset{\Delta}{=}\sup\limits_N\inf\limits_{n\ge N}a_n=\inf\limits_N\sup\limits_{n\ge N}a_n\overset{\Delta}{=}\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=a$ число a називається границею послідовності, $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Розглянемо далі деякий простір X. Будь-яку підмножину $A\subseteq X$ – сукупність елементів з X – будемо називати подією. Разом з простором X розглянемо також алгебру подій A. Природнім чином виникає питання про кількісний опис подій. Введемо оцінку – можливість, – аксіоматичні властивості якої є цілком зрозумілими. А саме, якщо події A та B з'являються з деякими значеннями можливостей, то подія, яка полягає в тому, що з'явиться або A, або B, буде мати найбільшу з можливостей A та B. Конкретизуючи, кожній множині $A\in A$ поставимо у відповідність деяке число $P(A)\ge0$, $P(A)\in L$.

Означення 5. Функцію $P:A\to L$ будемо називати мірою можливості, якщо:

1. $P(A)\ge0$ для $\forall A\in A$;
2. $P(A)$ – зліченно-адитивна, тобто для $\forall\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i\in A$ такої, що $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in A$ виконується:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\mathop{+}_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sup_{i=\overline{1,\infty}}P(A_i).$$

Відмітимо, що на відміну від класичної теорії міри, умова зліченної адитивності не накладає обмежень на множини $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i\in A$, – в теорії можливостей не є необхідною умова $A_i\bigcap A_j=\theta, i\ne j$. Відсутність цієї умови в теорії можливостей не є суттєвим доповненням або відмінністю від класичної теорії міри. Можна показати, що властивість 2, яка введена тільки для множин, що не перетинаються, може бути легко поширена на будь-які множини.

Виділимо найпростіші властивості міри можливості.

Лема 1. Якщо $A,B\in A$, $A\subseteq B$, то $P(A)\le P(B)$.

Доведення. Дійсно, оскільки $B=A\bigcup(B\backslash A)$, то $P(B)=P(A\bigcup(B\backslash A))=\max\{P(A),P(B\backslash A)\}$, звідки випливає, що $P(A)\le P(B)$.

Лема 2. (Неперервність відносно монотонно зростаючої послідовності)

Нехай задано $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i\in A$ і $A_i\subset A_{i+1}$, причому $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in A$. Тоді $P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$.

Доведення. Дійсно, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\sup_{n\ge1}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

то $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_n)=\sup\limits_{n\ge1}P(A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$. Остання рівність випливає з властивості монотонності можливості.

Лема 3. (Напівнеперервність знизу відносно монотонно спадної послідовності)

Нехай задано $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i\in A$, $A_{i+1}\subset A_i$, і $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in A$, тоді $P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)\le\liminf\limits_{n\to\infty}P(A_n)$.

Доведення. Дійсно, з властивості монотонності випливає, що $\forall k\ge N\quad P(A_k)\ge P(\inf\limits_{n\ge N}A_n)$, $N\ge1$. Звідки випливає, що $\inf\limits_{k\ge N}P(A_k)\ge P(\inf\limits_{n\ge N}A_n)$. Тоді

$$\sup_N P(\inf_{n\ge N}A_n)=P(\sup_N\inf_{n\ge N}A_n)=$$
$$=P(\liminf_{n\to\infty}A_n)\le\sup_N\inf_{n\ge N}P(A_n)=\liminf_{n\to\infty}P(A_n).$$

причому $P(\liminf\limits_{n\to\infty}A_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$. Отже маємо, що $P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)\le\liminf\limits_{n\to\infty}P(A_n)$.

Властивість напівнеперервності можливості означає, що для довільної послідовності $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i \in A$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, ми не можемо в загальному випадку говорити, що $\lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = P(A)$. З практичної точки зору для спадної послідовності множин ми не можемо визначити можливість появи граничної множини, маючи можливості елементів послідовності. А саме, наприклад, неможливо визначити значення $P(\varnothing)$ по неперервності, оскільки $P(A)$ не неперервна при $A = \varnothing$.

Дійсно, нехай послідовність $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i \in A$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $A_{n+1} \subset A_n$ (послідовність абсолютно спадна). Тоді

$P(\varnothing) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \inf P(A_n)$. Таким чином визначимо $P(\varnothing)$ як довільне число з відрізка $[0, \inf\limits_{A\in A} P(A)]$. При цьому $P(A \bigcup \varnothing) = P(A)$, $P(A \bigcap \varnothing) = \varnothing$, $\forall A \in A$. Надалі будемо вважати, якщо це не обговорюється спеціально, що $P(\varnothing) = 0$.

Нехай X – довільний простір, A – визначена на просторі X алгебра множин, а $P(\cdot)$ – можливість на A. Природнім є питання продовження міри на більш широкий клас множин. Для цього введемо поняття зовнішньої міри.

Отже, алгебра в класичному її розумінні разом із мірою є тими об'єктами, які ми знаємо напевно та можемо їх між собою порівнювати. Природнім є бажання дослідити всі можливі події, які можуть трапитися. Але не кожну з них можна описати в термінах нашої бази знань. Тому постає питання продовження цієї міри на всі досліджувані події.

Означення 6. Функцію $P^*(\cdot): \beta(X) \to L$, яка задається наступним чином:

$$P^*(B) = \inf_{\{E_j\}\in A} \sup_j P(E_j) \ , \tag{1}$$

де $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}, E_i \in A$ такі, що $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, будемо називати зовнішньою мірою можливості.

Таке покриття завжди існує. Дійсно, поклавши $E_1 = X$, $E_2 = E_3 = ... = \varnothing$, отримаємо що будь-яка множина A з X покриваються $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j = X$.

Лема 4. Для довільної множини $A \in A$ зовнішня міра можливості дорівнює мірі можливості цієї множини, тобто $P^*(A) = P(A)$.

Доведення. Виберемо послідовність $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}, E_i \in A$ таким чином, що $E_1 = A$, $E_2 = E_3 = ... = \varnothing$. Отримаємо, що $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, і відповідно, $\inf\limits_{\{E_j\}} \sup\limits_j P(E_j) \le P(A)$. Тобто $P^*(A) \le P(A)$.

За визначенням точної нижньої межі для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{E_i\}_{i=1}^{\infty}, E_i \in A$, таке що

$$\sup_j P(E_j) = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) < P^*(A) + \varepsilon .$$

Оскільки $A = A \bigcap (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A \bigcap E_j)$, тоді

$$P(A) = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A \bigcap E_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A \bigcap E_j) =$$
$$= \sup_{j=\overline{1,\infty}} P(A \bigcap E_j) \le \sup_{j=\overline{1,\infty}} P(E_j) \text{, при } A \in A .$$

Звідси випливає, що $P(A) < P^*(A) + \varepsilon$. Але при $\varepsilon \to 0$ матимемо знак нестрогої нерівності, тобто $P(A) \le P^*(A)$. А отже, $P(A) = P^*(A)$.

Лема 5. Зовнішня можливість є невід'ємною функцією множин, тобто $P^*(A) \ge 0$ для $\forall A \subset X$.

Доведення випливає з невід'ємності самої міри можливості.

Позначимо через

$$O_A = \{\{E_j\} : E_j \in A, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\} ;$$

$$O_B = \{\{E_j\} : E_j \in A, B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\} ,$$

Лема 6. Зовнішня міра можливості $P^*(\cdot)$ – монотонна, тобто для $\forall A, B \subset X$, таких що $A \subset B$ матимемо $P^*(A) \le P^*(B)$.

Доведення. Множини O_A, O_B є множинами злічених зовнішніх покрить A і B відповідно.

Тоді $O_A \supseteq O_B$. Звідси випливає, що $P^*(A) \le P^*(B)$.

Теорема 1. (Про продовження міри можливості) Зовнішня міра P^*, яка визначена на булеані $\beta(X)$, є мірою можливості.

Доведення. Невід'ємність зовнішньої міри випливає з означення. Доведемо адитивність, тобто $P^*(A \bigcup B) = P^*(A) + P^*(B)$, для $\forall A, B \in X$. З однієї сторони, з властивості монотонності міри випливає, що

$$P^*(A \bigcup B) \ge P^*(A), P^*(A \bigcup B) \ge P^*(B)$$

і, відповідно,

$$P^*(A \bigcup B) \ge \max(P^*(A), P^*(B)) =$$
$$= P^*(A) + P^*(B) .$$

Доведемо протилежну нерівність. Позначимо через

$$O_{A\cup B} = \{\{L_j\} : L_j \in A, A \bigcup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j\}.$$

Нехай $\{E_j\} \in O_A$, $\{F_j\} \in O_B$. Тоді маємо, що $\{E_j \bigcup F_k\} \in O_{A\cup B}$. Звідси отримаємо

$$P^*(A \bigcup B) = \inf_{O_{A\cup B}} \sup_n P(L_n) \le \sup_{j,k} P(E_j \bigcup F_k) =$$
$$= \max\{\sup_j P(E_j), \sup_k P(F_k)\}.$$

Тоді

$$P^*(A \bigcup B) \le \inf_{\{E_j\}\in O_A} \inf_{\{F_k\}\in O_B} \max\{\sup_j P(E_j), \sup_k P(F_k)\} =$$
$$= \max\{\inf_{\{E_j\}\in O_A} \sup_j P(E_j), \inf_{\{F_k\}\in O_B} \sup_k P(F_k)\} =$$
$$= P^*(A) + P^*(B).$$

Тобто

$$P^*(A \bigcup B) \le P^*(A) + P^*(B),$$

звідки випливає, що $P^*(A \bigcup B) = P^*(A) + P^*(B)$.

За індукцією можемо поширити цей результат для $\forall N > 1$ і $\forall A_i \subset X, i = \overline{1, N}$

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{i=1}^{N} P^*(A_i) = \max_{j=\overline{1, N}} P^*(A_i).$$

Покажемо злічену адитивність. Тобто покажемо виконання рівності

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_j P^*(A_i).$$

Спочатку доведемо виконання нерівності

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sup_{i=\overline{1,\infty}} P^*(A_i).$$

Для множини $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ маємо

$$P^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \inf_{\{E_j\}} \sup_{j=\overline{1,\infty}} P(E_j).$$

Відповідно, для кожної із множин A_j виконується

$$P^*(A_j) = \inf_{\{E_{jk}\}\in O_{A_j}} \sup_{k=\overline{1,\infty}} (E_{jk}). \quad (2)$$

Набір множин $\{E_{jk}\}_{j=\overline{1,\infty}, k=\overline{1,\infty}}$ є одним із зовнішніх покриттів множини $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Через те, що нижня грань множини не більше будь-якого його члена, то виконується така нерівність:

$$P^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \inf_{\{E_j\}} \sup_{j=\overline{1,\infty}} P(E_j) \le$$
$$\le \sup_{\substack{j=\overline{1,\infty}\\ k=\overline{1,\infty}}} P(E_{jk}) = \sup_{j=\overline{1,\infty}} \sup_{k=\overline{1,\infty}} P(E_{jk}). \quad (3)$$

З (2) випливає, що для кожного $j = \overline{1,\infty}$ можна підібрати таке зовнішнє покриття $\{E_{jk}\}_{k=\overline{1,\infty}}$, що $P^*(A_j) \ge \sup_{k=\overline{1,\infty}} P(E_{jk}) - \varepsilon$. Підставивши цей вираз в (3), одержуємо, що $P^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sup_{j=\overline{1,\infty}} P^*(A_j) + \varepsilon$. Через те, що ε може бути як завгодно малим додатним числом, одержуємо, що

$$P^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sup_{j=\overline{1,\infty}} P^*(A_j).$$

Доведемо тепер нерівність

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \ge \sup_{i=\overline{1,\infty}} P^*(A_i).$$

Через те, що A_j входить в $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, тобто виконується $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supseteq A_j$, з монотонності зовнішньої можливості випливає, що

$$P^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \ge P^*(A_j).$$

Звідси отримаємо нерівність

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \ge \sup_{i=\overline{1,\infty}} P^*(A_i).$$

Таким чином, $P^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P^*(A_j)$. Маємо що $P^*(\cdot)$ – злічена адитивна та невід'ємна функція. Отже $P^*(\cdot)$, за означенням, міра можливості, що і доводить теорему.

Нехай задано простір $X = \{1, 2, 3\}$, алгебра $A = (\{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \theta)$. Введемо міру можливості $P(\cdot)$, вкладаючи в неї фізичний зміст такий, що в множині принаймні два елементи. Тоді, $P(\{1, 2\}) = P(\{1, 2, 3\}) = 1$, $P(\{3\}) = P(\theta) = 0$. Побудуємо зовнішню міру для множини $\{1\}$: $P(\{1\}) = \inf_{\{E_j\}} \sup P(E_j) = P(\{1, 2\}) = 1$. Маємо, що при продовженні міри ми для одноелементної множини, отримали що в ній принаймні два елементи.

Таким чином, продовжуючи міру ми отримуємо лише верхню оцінку, яка формально задовольняє властивостям міри.

Властивості можливості та розглянутий приклад ясно виражають думку, що введення лише цього варіанта міри в просторі подій недостатньо для адекватного та якісного опису моделей. Отже, існує потреба введення нижньої оцінки міри, фізична суть якої в тому, що деяка подія мусить відбутися.

При чому, міра того, що цей факт відбудеться напевно, не може бути меншою деякого числа. І цілком природно, що ця нова міра може бути введена на тій же шкалі $L = ([0,1], \leq, +, \circ)$, що й можливість, якщо ми намагаємось описати подію двома величинами, які мають бути якимось чином пов'язані.

Означення 7. Мірою необхідності називатимемо функцію $N : A \to L$, яка задовольняє таким умовам:

1. $N(A) \geq 0$ для $\forall A \in A$;
2. $N(A)$ – злічена мультиплікативна, тобто для $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i \in A$ такої, що $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in A$ виконується:

$$N(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathop{\circ}_{i=1}^{\infty} A_i = \underline{\inf}_{i=\overline{1,\infty}} N(A_i) .$$

Суть умов, які накладаються на функцію $N(\cdot)$ можна інтерпретувати наступним чином: для двох подій, які відбудуться з деякими значеннями необхідностей, сумісна подія відбудеться з найменшою (мінімальною) необхідністю. Тут вже виникає певна дуальність з поняттям можливості.

Необхідність задовольняє всім тим умовам та має всі ті властивості, яких не має можливість. Таким чином, можливість і необхідність логічно розглядати в парі, оскільки разом їхні переваги збалансовуються, що дає змогу описувати коректно не тільки події, а й будь-які злічені операції над ними.

Висновки

В роботі побудовано модель простору можливостей з двома мірами – мірою можливості і мірою необхідності (X, A, P, N), яку називатимемо (PN)-моделлю, вважаючи її адекватною до опису поставлених на початку роботи питань. Ввівши міри можливості і необхідності ми отримали апарат, який дозволяє знаходити значення цих мір для будь-якої кількості подій, та адекватно описувати експеримент.

Список літератури

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н. Колмогоров. – М.: Теория вероятностей и математическая статистика, 1974. – 120 с.
2. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
3. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применение / Ю.П. Пытьев. – М.: УРСС, 1990. – 190 с.
4. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility / L.A. Zadeh // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – 1. – P. 3-28.
5. Бєлов Ю.А. Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки / Ю.А. Бєлов, О.С. Бичков, М.Г. Меркур'єв, А.І. Чулічков // Доповіді НАН України. – 2006. – №10. – С. 14-19.
6. Бычков А.С. До теорії можливостей та її застосування / А.С. Бычков // Доповіді НАН України. – 2007. – №5. – С. 7-12.
7. Орлов А.И. Нечисловая статистика / А.И. Орлов. – М.: МЗ-Пресс, 2004. – 513 с.
8. Raissi H. Effectiveness of conditional possibilities on numerical information fusion / H. Raissi, H. Guesmi, A. Alimi. – M.2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). – Budapest, 2016. – Pp. 003045-003050. doi: 10.1109/SMC.2016.7844704M.
9. Bellaaj I. Possibility theory based approach for iris recognition in biometric systems / I. Bellaaj, K. Kallel and D.S. Masmoudi // 2014 1st International Conference on Advanced Technologies for Signal and Image Processing (ATSIP), Sousse, 2014. – Pp. 54-58. doi: 10.1109/ATSIP.2014.6834657
10. Bellaaj M. Possibilistic modeling palmprint and fingerprint based multimodal biometric recognition system / M. Bellaaj, R. Boukhris, A. Damak, D. Sellami // Image Processing Applications and Systems (IPAS). – International, 2016. – Pp. 1-8.
11. de Cooman D. A random set description of a possibility measure and its natural extension / D. de Cooman, D. Aeyels // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – Part A: Systems and Humans. – Vol. 30. – No. 2. – Pp. 124-130. Mar 2000, doi: 10.1109/3468.833093.
12. Coletti G. Fuzzy memberships as likelihood functions in a possibilistic framework / G. Coletti, D. Petturiti, B. Vantaggi // Journal International Journal of Approximate Reasoning. – Vol. 88. – Issue C. – September 2017. – Pp. 547-566.
13. Anzilli L. A possibilistic approach to investment decision making / L. Anzilli // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge. – Based Systems. – Vol. 21. – Issue 02. – April, 2013. – P. 201-221.
14. Wu X. Generalized representation theorem and its application to the construction of fuzzy sets: Existence and uniqueness / X. Wu // International Journal of Approximate Reasoning. – Vol. 53. – Issue 7. – October, 2012. – Pp. 1020-1030.
15. Miranda E. A random set characterization of possibility measures / E. Miranda, I. Couso, P. Gil // Information Sciences. – Vol. 168. – Issues 1-4. – 3 December, 2004, Pp. 51-75.
16. Liu B. Uncertainty Theory. Fourth edition / B. Liu. – Springer-Verlag, Berlin, 2015. – 363p. DOI 10.1007/978-3-662-44354-5.
17. Liu B. A survey of credibility theory / B. Liu // Fuzzy optimization and decision making. – 2006. – Vol. 5, No. 4. – Pp. 387-408.
18. Liu B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process / B. Liu // Journal of Uncertain Systems. – 2008. – Vol. 2, No.1. – Pp. 3-16.

Reference

1. Kolmogorov, A.N. (1974), "*Osnovnyie ponyatiya teorii veroyatnostey*" [*The basic provisions of probability theory*], Seriya Teoriya veroyatnotsey i matematicheskiya statistika, Moscow, 120 p.
2. Dyubua, D. and Prad, A. (1990), "*Teoriya vozmozhnostey. Prilozheniya k predstavleniyu znaniy v informatike*" [*The theory of possibilities. Applications to knowledge representation in computer science*], Radio i svyaz, Moscow, 288 p.
3. Pyitev, Yu.P. (1990), "*Vozmozhnost. Elementyi teorii i primenenie*" [*Possibility. Elements of the theory and application*], URSS, Moscow, 190 p.

4. Zadeh, L.A. (1978), Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, No. 1, 1978, P. 3-28.
5. Belov, Yu.A., Bychkov, O.S., Merkur'ev, M.G. and Chulichkov, A.I. (2006) "Pro odin pidhid do modelyuvannya nechitkoyi dinamiki" [About one methods to modelling of fuzzy dynamics], *Dopovidi NAN Ukrayini*, No. 10, pp. 14-19.
6. Bychkov, O.S. (2007), "Do teoriyi mozhlivostey ta yiyi zastosuvannya" [To the theory of possibilities and application], *Dopovidi NAN Ukrayini*, No. 5, Pp. 7-12.
7. Orlov, A.I. (2004), "*Nechislovaya statistika*" [*Non-numeric statistics*], MZ-Press, Moscow, 513 p.
8. Raissi, H., Guesmi, H. and Alimi, A.M. (2016), Effectiveness of conditional possibilities on numerical information fusion, *2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, Budapest, pp. 003045-003050. doi: 10.1109/SMC.2016.7844704M.
9. Bellaaj, I., Kallel, K. and D.S. Masmoudi (2014), Possibility theory based approach for iris recognition in biometric systems *2014 1st International Conference on Advanced Technologies for Signal and Image Processing (ATSIP)*, Sousse, 2014, Pp. 54-58. doi: 10.1109/ATSIP.2014.6834657.
10. Bellaaj, M., Boukhris, R., Damak, A. and Sellami, D. (2016), Possibilistic modeling palmprint and fingerprint based multimodal biometric recognition system, *Image Processing Applications and Systems (IPAS)*, International, pp. 1-8.
11. de Cooman, D. and Aeyels, D. (2000), A random set description of a possibility measure and its natural extension IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, *Part A: Systems and Humans*, Vol. 30, No. 2, pp. 124-130, Mar 2000, doi: 10.1109/3468.833093.
12. Coletti, G., Petturiti, D. and Vantaggi, B. (2017), Fuzzy memberships as likelihood functions in a possibilistic framework, *Journal International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 88, Issue C, pp. 547-566.
13. Anzilli, L. (2013), A possibilistic approach to investment decision making, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge – Based Systems*, vol. 21, Issue 02, pp. 201-221.
14. Wu, X. (2012), Generalized representation theorem and its application to the construction of fuzzy sets: Existence and uniqueness, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 53, Issue 7, pp. 1020-1030.
15. Miranda, E., Couso, I. and Gil, P. (2004), "A random set characterization of possibility measures", *Information Sciences*, vol. 168, Issues 1-4, 3 December 2004, pp. 51-75.
16. Liu, B. (2015), *Uncertainty Theory*, Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 363 p. DOI 10.1007/978-3-662-44354-5.
17. Liu, B. (2006), "A survey of credibility theory". *Fuzzy optimization and decision making*, Vol. 5, No. 4, pp. 387-408.
18. Liu, B. (2008), "Fuzzy process, hybrid process and uncertain process", *Journal of Uncertain Systems*, 2008, Vol. 2, No. 1, pp. 3-16.

Надійшла до редколегії 7.11.2017
Схвалена до друку 7.12.2017

***Відомості про автора*:**

Бичков Олексій Сергійович
кандидат фізико-математичних наук доцент
завідувач кафедри
Київського національного університету
ім. Тараса Шевченка,
Київ, Україна
https://orcid.org/0000-0002-9378-9535
e-mail: bos.knu@gmail.com

***Information about the author*:**

Oleksii Bychkov
Candidate of Physics and Mathematics Sciences
Associate Professor,
Head of Department
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-9378-9535
e-mail: bos.knu@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МЕР ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ НЕЧЕТКИХ ПРОЦЕССОВ И СОБЫТИЙ

А.С. Бычков

В этой работе ставится задача построения обобщенной модели теории возможности с использованием кроме меры возможности, еще и меру необходимости, и математическое обоснование такой модели пространства возможностей. Построение теории четко следует схеме теории вероятностей, что позволяет проследить формальные аналогии и различия понятий и методов теории вероятности и теории возможностей. Обоснована необходимость введения новой модели теории возможностей. Приводятся новые определения. Доказываются фундаментальные леммы и теоремы. Результаты работы можно применять при моделировании процессов и поведения объектов, когда невозможно проводить серию экспериментов.

Ключевые слова: *модель пространства, мера необходимостей, мера возможностей, продолжение мер.*

APPLICATION OF MEASURES OF OPPORTUNITY AND NECESSITY FOR CONSTRUCTING A GENERALIZED MODEL OF DESCRIPTION OF FUZZY PROCESSES AND EVENTS

O. Bychkov

Theoretical-probabilistic methods are widely and successfully used in research for modeling aspects of uncertainty and fuzziness reflecting the incompleteness of knowledge or their unreliability. But theoretical-probabilistic methods proved to be ineffective in the simulation of a wide class of processes and phenomena in which the crucial role is played by uncertainty and obscurity. It is a question of modeling complex physical, social and economic systems, subjective judgments for modeling and research which can not be performed by statistical tests.

In this paper, the goal is to construct a generalized model of the theory of possibility by using, in addition to the measure of possibilities the measure necessity and the mathematical justification of such a model of space of possibilities.

The construction of a theory clearly follows the scheme of probability theory. This allows us to follow the formal analogies and differences between the concepts and methods of probability theory and the theory of possibilities. The most significant difference between this theories is the interpretation of the physical content of an event, which is described in terms of possibilities. This is significantly different from frequency interpretation in terms of probabilities. This allows you to simulate and explore a much wide class of tasks than would be possible to do with probability theory methods.

Keywords: *space model, measure of necessarily, measure of possibility, continuation of measures.*