УДК 621.391

А.С. Жученко

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба

МЯГКОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ

Показана взаимосвязь оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки последовательности и минимизацией средней вероятности ошибки символа. Обобщены подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов.

помехоустойчивый код, мягкое декодирование

Введение

Постановка проблемы и анализ литературы. Все существующие методы декодирования помехоустойчивых кодов можно разделить на два класса: методы жесткого декодирования и методы мягкого декодирования. Применение оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов позволяет снизить отношение сигнал/шум приблизительно на 2 дБ при сохранении заданной достоверности передачи информации по сравнению с методами жесткого декодирования. Недостатком оптимальных методов мягкого декодирования является большая сложность практической реализации, которая ограничивает сферу их применения [1 – 3].

Наиболее широко методы мягкого декодирования стали использоваться с появлением каскадных кодов, допускающих эффективное итеративное декодирование с обменом мягкими решениями на каждой итерации (турбокодов и аналогичных им каскадных кодовых конструкций на основе блочных кодов) [4].

Таким образом, актуальной задачей является разработка субоптимальных методов и алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов (как сверточных, так и блочных) уменьшенной сложности. Для решения такой задачи сначала необходимо с единых позиций провести анализ оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов и обобщить подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования.

Целью статьи является проведение анализа оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов и обобщение подходов, направленных на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования.

Основной материал

Математическая постановка задачи оптимального декодирования. Пусть $\overline{m}_i$ – i-ое передаваемое сообщение (информационная последовательность) длиной K двоичных символов, $\overline{m}_i = (m_{i1}, m_{ij}, ..., m_{iK})$, $i = 1 ... 2^K$.

Пусть $\overline{x}_i$ – i-е кодовое слово блочного систематического помехоустойчивого (N, K) кода, $\overline{x}_i = (x_{i1}, x_{ij}, ..., x_{iK}, x_{iK+1}, ..., x_{iN})$, $i = 1 ... 2^K$ (кодовая последовательность). Если считать, что первые K символов кодового слова представляют собой передаваемое сообщение $\overline{m}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iK})$, то справедливо равенство $\overline{x}_i = (\overline{m}_i, \overline{c}_i)$, где $\overline{c}_i$ – последовательность проверочных символов кода.

Будем считать, что заданы:

– вероятности передачи сообщений (кодовых слов) $\Pr(\overline{m}_i) = \Pr(\overline{x}_i)$, $i = 1 ... 2^K$ или вероятности того, что символ x_j, $j = 1 ... N$ примет значение 1 и 0 – $\Pr(x_j = 0)$ и $\Pr(x_j = 1)$, причем $\Pr(x_j = 0) + \Pr(x_j = 1) = 1$;

– условная плотность вероятности $p(\overline{y}/\overline{x}_i)$ принимаемой последовательности $\overline{y}$, $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_K, y_{K+1}, ..., y_N)$ на входе декодера при условии, что передается кодовое слово $\overline{x}_i$. Отметим, что для канала без памяти справедливо равенство $p(\overline{y}/\overline{x}_i) = \prod_{j=1}^{N} p(y_i / x_{ij})$, где $p(y_i / x_{ij})$ – условная плотность вероятности принятого символа y_i, при условии, что передан символ x_{ij}.

Задачу оптимального декодирования помехоустойчивого кода можно сформулировать двумя способами.

1. По принятой последовательности $\overline{y}$ вынести оптимальное по критерию минимума средней вероятности ошибки последовательности решение о том, какое именно сообщение $\overline{m}_i$ из множества возможных сообщений было передано [5].

2. По принятой последовательности $\overline{y}$ вынести оптимальное по критерию минимума средней веро-

ятности ошибки символа решение о том, какое значение имеет символ x_j.

Далее рассмотрим оптимальные методы мягкого декодирования помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки последовательности и минимизацией средней вероятности ошибки символа.

Мягкое декодирование помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки последовательности. В этом случае оптимальным является решение, принимаемое по максимуму апостериорной вероятности последовательности:

$$\hat{m} = \overline{m}_i \text{, если}$$

$$\Pr(\overline{x}_i/\overline{y}) > \Pr(\overline{x}_j/\overline{y}),\ \forall j \neq i,\ j = 1\ldots 2^K. \quad (1)$$

Воспользуемся формулой Байеса для нахождения $\Pr(\overline{x}_i/\overline{y})$: $\Pr(\overline{x}_i/\overline{y})p(\overline{y}) = p(\overline{y}/\overline{x}_i)\Pr(\overline{x}_i)$, откуда

$$\Pr(\overline{x}_i/\overline{y}) = p(\overline{y}/\overline{x}_i)\frac{\Pr(\overline{x}_i)}{p(\overline{y})}. \quad (2)$$

Плотность вероятности $p(\overline{y}/\overline{x}_i)$ будем рассматривать как функцию $\overline{x}_i$ при фиксированной реализации последовательности на входе декодера $\overline{y}$ и в дальнейшем называть функцией правдоподобия [5]. При равновероятных сообщениях оптимальным является решение, принимаемое по максимуму функции правдоподобия (так как $p(\overline{y})$ не зависит от $\overline{x}_i$), а декодер называется декодером максимального правдоподобия:

$$\hat{m} = \overline{m}_i \text{, если}$$

$$p(\overline{y}/\overline{x}_i) > p(\overline{y}/\overline{x}_j),\ \forall j \neq i,\ j = 1\ldots 2^K.$$

Мягкое декодирование помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки символа. Методы мягкого декодирования с посимвольным принятием решений являются базовыми при разработке итеративных методов декодирования помехоустойчивых кодов.

Как и в предыдущем случае, оптимальным является решение, принимаемое по максимуму апостериорной вероятности, но не последовательности, а одного символа:

$$\hat{x}_j = 0 \text{, если } \Pr(x_j = 0/\overline{y}) > \Pr(x_j = 1/\overline{y});$$

$$\hat{x}_j = 1 \text{, если } \Pr(x_j = 1/\overline{y}) > \Pr(x_j = 0/\overline{y}),$$

где $\Pr(x_j = 0/\overline{y})$ – апостериорная вероятность того, что символ $x_j = 0$; $\Pr(x_j = 1/\overline{y})$ – апостериорная вероятность того, что символ $x_j = 1$.

Аналогично выражению (2) можно записать:

$$\Pr(x_j = \alpha/\overline{y}) = p(\overline{y}/x_j = \alpha)\frac{\Pr(x_j = \alpha)}{p(\overline{y})}, \quad (3)$$

где $\alpha = 0,1$.

Теперь считая, что известны плотности вероятности $p(\overline{y}/\overline{x}_i)$, $\forall i = 1\ldots 2^K$, а также полагая значения всех символов, кроме x_j, несущественными, найдем $p(\overline{y}/x_j = \alpha)$, $\alpha = 0,1$ путем статистического усреднения $p(\overline{y}/\overline{x}_i)$ по несущественным символам:

$$p(\overline{y}/x_j = \alpha) = \sum_{\substack{\forall i = 1\ldots 2^K, \\ \text{если } x_{ij} = \alpha}} p(\overline{y}/\overline{x}_i)\Pr(\overline{x}'_i),$$

где $\overline{x}_i = \{\overline{x}'_i, x_{ij}\}$.

Используя (3), определим $\Pr(x_j = \alpha/\overline{y})$:

$$\Pr(x_j = \alpha/\overline{y}) = p(\overline{y}/x_j = \alpha)\frac{\Pr(x_j = \alpha)}{p(\overline{y})} =$$

$$= \frac{1}{p(\overline{y})}\Pr(x_j = \alpha) \sum_{\substack{\forall i = 1\ldots 2^K, \\ \text{если } x_{ij} = \alpha}} p(\overline{y}/\overline{x}_i)\Pr(\overline{x}'_i).$$

В полученном выражении внесем множитель $\Pr(x_j = \alpha)$ под знак суммы и, учитывая, что для независимых x_j – $\Pr(\overline{x}_i/\overline{y}) = \Pr(\{\overline{x}'_i, x_{ij} = \alpha\}/\overline{y}) = \Pr(x_j = \alpha)\Pr(\overline{x}'_i)$, получим:

$$\Pr(x_j = \alpha/\overline{y}) = \frac{1}{p(\overline{y})} \sum_{\substack{\forall i = 1\ldots 2^K, \\ \text{если } x_{ij} = \alpha}} p(\overline{y}/\overline{x}_i)\Pr(\overline{x}_i). \quad (4)$$

Анализ выражений (1) и (4) показывает, что общим для двух оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов является нахождение апостериорных вероятностей всех возможных кодовых последовательностей. А отличие состоит в том, каким образом найденные апостериорные вероятности используются для принятия решения.

Основные подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов. Рассмотренные выше оптимальные методы мягкого декодирования могут быть реализованы только для коротких кодов, так как сложность соответствующих алгоритмов декодирования пропорциональна количеству всех возможных кодовых слов, т.е. $\sim 2^K$.

Кроме того, эти методы в явном виде не учитывают структуру кода (взаимосвязь информационных символов с проверочными) и требуют только знания образцов всех возможных кодовых последовательностей. Однако, в общем случае, учет особенностей структуры кода позволяет существенно снизить сложность алгоритмов мягкого декодирования. Поэтому далее обобщим основные подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов (как оптимальных, так и субоптимальных).

1. Представление помехоустойчивого кода с помощью графа. Такой подход позволяет представить кодовое слово как путь в графе, а декодирование рассматривать как поиск пути, соответствующего кодовому слову с наибольшим значением апостериорной вероятности.

Наиболее эффективным этот подход оказался для сверточных кодов, обладающих регулярной решетчатой структурой с постоянным числом состояний на каждом ярусе решетчатой диаграммы, не зависящим от длины информационной последовательности.

Примерами алгоритмов декодирования, использующих решетчатую диаграмму сверточных кодов является алгоритм Витерби [6] и MAP алгоритм [7].

Сложность таких алгоритмов определяется, в основном, числом состояний решетчатой диаграммы на одном ярусе – числом состояний кодера с памятью ν как 2^{ν} и линейно зависит от длины информационной последовательности.

Применение данного подхода к блочным кодам наталкивается на определенные трудности, так как решетчатая диаграмма блочных кодов является, в общем случае, нерегулярной с числом состояний 2^{N-K}.

2. Использование множества проверочных уравнений помехоустойчивого кода. Для помехоустойчивого (N, K) кода можно образовать 2^{N-K} проверочных уравнений путем линейной комбинации строк проверочной матрицы.

Такой подход применяется при мягком декодировании с минимизацией средней вероятности ошибки символа. В этом случае мягкое решение символа определяется совокупностью вкладов от всех возможных проверочных уравнений, в которые входит данный символ.

Примером использования такого подхода является алгоритм Хартмана – Рудольфа [3], рассматривающий 2^{N-K} линейных комбинаций строк проверочной матрицы как кодовые слова дуального кода. Сложность алгоритма Хартмана – Рудольфа определяется числом проверочных уравнений, которые используются для получения мягкого решения символа, т.е. $\sim 2^{N-K}$.

Частным случаем метода Хартмана – Рудольфа можно считать методы порогового декодирования [1 – 3], которые используют не все возможные проверочные уравнения, а только те, которые ортогональны по данному символу, недостатком которых является ограниченный класс кодов, к которым этот метод применим.

3. Порождение некоторого числа кодовых слов с большими значениями апостериорных вероятностей (порождение кодовых слов, наиболее близких к передаваемому кодовому слову).

Суть данного подхода заключается в аппроксимации правила (1) путем использования для сравнения только наиболее значимых членов, что позволяет существенно снизить сложность алгоритмов декодирования.

Порождение кодовых слов, наиболее близких к передаваемому кодовому слову, возможно, например, если считать, что ошибки содержатся только на позициях наименее достоверных символов.

Среди методов, использующих этот подход, можно выделить методы перестановочного декодирования [3], метод декодирования по обобщенному минимальному расстоянию [2] и методы Чейза [3].

Выводы

Показана взаимосвязь оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки последовательности и минимизацией средней вероятности ошибки символа. Обобщены подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов.

Список литературы

1. *Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: Пер. с англ. / Под. ред. К.Ш. Зигангирова. – М.: Мир, 1986. – 576 с.*

2. *Витерби А.Д., Омура Дж. К. Принципы цифровой связи и кодирования: Пер. с англ. / Под ред. К.Ш. Зигангирова. – М.: Радио и связь, 1982. – 535 с.*

3. *Кларк Дж.-мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. / Под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.*

4. *Berrou C., Glavieux A., Thitiumjshima P. Near Shannon limit error correcting coding: Turbo codes // Int. Conf. on Commun. – Geneva, Switzerland. – 1993. – P. 1061-1070.*

5. *Долгов В.И. Основы статистической теории приема дискретных сигналов. – Х.: ХВВКИУ РВ, 1989. – 448 с.*

6. *Витерби А. Границы ошибок для сверточных кодов и асимптотически оптимальный алгоритм декодирования // Некоторые вопросы теории кодирования. – М., 1970. – С. 142-165.*

7. *Pietrobon S S., Barbulescu A.S. A simplification of the modified Bahl decoding algorithm for systematic convolutional codes // Int. Symp. on Inform. Theory and its Applications. – Sydney, Australia. – November 1994 – P. 1073-1077.*

Поступила в редколлегию 14.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков.